

**Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара**

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

А.М. Пасько

**ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «ВИЩА
МАТЕМАТИКА». ЧИСЛОВІ РЯДИ**

**Дніпро
2021**

Посібник присвячено вивченню ознак збіжності числових рядів та деяких інших тверджень, пов'язаних зі збіжними числовими рядами. Теоретичний матеріал проілюстровано численними прикладами та низкою рисунків. Наприкінці наведено значну кількість задач, призначених для використання на практичних заняттях або для самостійної роботи студента. Для студентів фізико-технічного факультету, факультету фізики, електроніки та комп'ютерних систем. Може бути використано як допоміжна література до вивчення курсу «Математичний аналіз» студентами механіко-математичного факультету, факультету прикладної математики. Призначено для студентів як денної, так і заочної форм навчання.

Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 11 від 25 червня 2021 р.)

Рецензенти:

М. В. Матяш, канд. техн. наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;

Я. С. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри статистики й теорії ймовірностей Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Посібник до вивчення курсу «Вища математика». Числові ряди

Автор: канд. фіз.-мат. наук, доц. А. М. Пасько,

© Пасько А.М. 2021

Вступ

Запропонований посібник присвячено питанням збіжності числових рядів – питанням, без яких неможливе вивчення рядів функціональних, зокрема таких, надзвичайно важливих для фізики й техніки функціональних рядів, як степеневі та тригонометричні ряди. Посібник складається з п'яти параграфів. В першому дані основні означення пов'язані зі збіжністю рядів, деякі найпростіші приклади та основні факти. В другому дано критерій збіжності ряду з невід'ємними членами та інтегральну ознаку збіжності, з допомогою якої, зокрема, обґрунтовано збіжність узагальненого гармонічного ряду. В третьому введено поняття абсолютної та умовної збіжності, обґрунтовано умовну збіжність ряду Лейбніца й ознаку Лейбніца збіжності ряду. В четвертому уміщено першу та другу (граничну) ознаки порівняння, з допомогою першої ознаки порівняння обґрунтовано ознаки Даламбера та Коші збіжності числового ряду. Ми дозволили тут собі відійти від загальноприйнятої схеми викладення, згідно з якою перша ознака порівняння, ознака Даламбера й ознака Коші формулюються спочатку для рядів із додатними членами, потім вводиться поняття абсолютної й умовної збіжності, відтак перша ознака порівняння, ознаки Даламбера й Коші формулюються вже в загальному випадку як ознаки абсолютної збіжності. В посібнику ці теореми сформульовано й доведено одразу для загального випадку, як ознаки абсолютної збіжності. П'ятий параграф присвячено таким фактам, як можливість довільним чином групувати члени збіжного ряду і переставна властивість абсолютно збіжних рядів.

Не підлягає сумніву, що вправність у розв'язанні математичних задач неможлива без розуміння глибинних зв'язків між численними математичними абстракціями, яке, розуміння, дається ретельним вивченням доведень математичних теорем. Тому основну увагу в посібнику приділено обґрунтуванню всіх уміщених у ньому тверджень. Втім, у тексті посібника розв'язано низку прикладів, що ілюструють застосування різноманітних ознак збіжності, а наприкінці наведено значну кількість задач, призначених для використання на практичних заняттях із дисципліни «Вища математика» або для самостійної роботи студента.

§1. Збіжні ряди: основні означення та факти.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – нескінченна послідовність дійсних чисел. **Нескінченним рядом** або просто **рядом** називається формальна сума:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

Частковими сумами ряду (1) називаються скінченні суми:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо послідовність часткових сум S_n має скінченну границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд (1) називають **збіжним** до числа S , а саме число S називають його **сумою**. Якщо ж послідовність часткових сум ряду (1) не має границі, або має нескінченну границю, то ряд (1) називають **розбіжним**. Якщо ряд (1) – збіжний, то кажуть, що він **збігається**, якщо розбіжний, кажуть, що **розбігається**.

Якщо S – сума ряду (1), цей факт символічно записують так:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Приклад 1. З курсу шкільної математики відомо, що сума нескінченної геометричної прогресії $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ – збіжний ряд при $|q| < 1$, і сума його дорівнює

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q},$$

якщо ж $|q| \geq 1$, то цей ряд – розбіжний.

Приклад 2. Послідовність $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, часткових сум ряду

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

має нескінченну границю, отже цей ряд – розбіжний.

Приклад 3. Послідовність часткових сум ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

має вигляд $1, 0, 1, 0, \dots$. Ця послідовність не має границі, отже ряд – розбіжний.

Зазвичай, побудова послідовності часткових сум того чи іншого ряду пов'язана зі значними технічними труднощами. Тому, якщо нас не цікавить конкретне значення суми ряду, а цікавить лише питання його збіжності або розбіжності, корисними бувають різноманітні умови збіжності рядів. Найпростіша з них дається такою теоремою.

Теорема 1 (Необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд (1) збіжний, то його загальний член прямує до нуля: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доведення. Візьмемо $n \geq 2$ та запишемо суму

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \text{ і } S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}. \text{ Якщо від } S_n \text{ від-}$$

няти S_{n-1} , то $a_n = S_n - S_{n-1}$. Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до числа S :

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$, що й слід було довести.

З необхідної умови збіжності ряду автоматично випливає розбіжність рядів прикладів 2 та 3, оскільки в обох цих прикладах загальний член не прямує до нуля. Зазначимо, проте, що необхідна умова збіжності ряду в жодному разі не є достатньою: існує безліч розбіжних рядів із загальним членом, котрий прямує до нуля. Один із таких рядів – так званий **гармонічний ряд**:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Цей ряд задовольняє необхідну умову збіжності: його загальний член $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, коли $n \rightarrow \infty$. Але гармонічний ряд – розбіжний. Щоб переконатися в цьому нам знадобиться такий критерій збіжності ряду.

Теорема 2 (Критерій Коші збіжності ряду). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N , таке що для будь-яких натуральних чисел n, m , котрі задовольняють умову $m > n \geq N$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Доведення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, це означає, що збіжні послідовності його часткових сум S_n . Відповідно до критерію Коші збіжності послідовностей:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m, \quad m > n \geq N: |S_m - S_n| < \varepsilon,$$

тобто

$$|\sum_{k=n+1}^m a_k| < \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Буває корисно формулювати критерій Коші збіжності ряду в дещо іншому вигляді.

Теорема 2' (Критерій Коші збіжності ряду). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N , таке що для будь-якого натурального $n \geq N$ і будь-якого натурального числа p виконується нерівність

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Застосуємо теорему 2' для обґрунтування розбіжності гармонічного ряду. Припустимо що гармонічний ряд – збіжний. Тоді, відповідно до теореми 2', $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N , таке що для будь-якого натурального $n \geq N$ і будь-якого натурального числа p виконується нерівність

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Візьмемо в нерівності (2) $p = n$, та оцінимо знизу ліву частину цієї нерівності

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \\ > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n} * n = \frac{1}{2}.$$

Отже, якщо взяти $\varepsilon = \frac{1}{2}$, нерівність (2) не виконується при $p = n$ за жодного значення n , що суперечить критерію Коші збіжності ряду. Отже, гармонічний ряд – розбіжний.

Наступна теорема складається з двох частин.

Теорема 3. 1) Нехай α – дійсне число. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ – теж збіжний, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжні, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ – теж збіжний, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Теорема впливає з означення суми ряду як границі часткових сум та арифметичних властивостей граничного переходу.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Залишком цього ряду називається величина

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Теорема 4. Залишок збіжного ряду прямує до нуля: $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Доведення. Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний, S – його сума, S_n – послідовність часткових сум, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Очевидно,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n,$$

отже $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$. Теорему доведено.

§ 2. Збіжність рядів із невід'ємними членами. Інтегральна ознака збіжності.

Теорема 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

усі члени якого невід'ємні $a_n \geq 0$, збігається тоді й тільки тоді, коли послідовність його часткових сум обмежена.

Доведення. Для будь-якої часткової суми ряду, починаючи з другої, з огляду на невід'ємність членів ряду

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1},$$

отже послідовність часткових сум ряду (1) монотонна. Збіжність монотонної послідовності еквівалентна її обмеженості. Теорему доведено.

Користуючись теоремою 1, можна довести таку важливу теорему.

Теорема 2 (Інтегральна ознака збіжності). Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дорівнюють значенням функції: $a_n = f(n)$, де $f(x)$ – визначена на півосі $[1, +\infty)$ дійснозначна функція, яка задовольняє умови:

- 1) скрізь на $[1, +\infty)$ функція набуває додатних значень $f(x) > 0$;
- 2) функція $f(x)$ монотонно спадає на $[1; +\infty)$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Доведення. Нехай невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ – збіжний. Довизначимо функцію $f(x)$ на проміжку $[0, 1)$ рівністю: $f(x) = f(1), x \in [0, 1)$ (рис. 1).

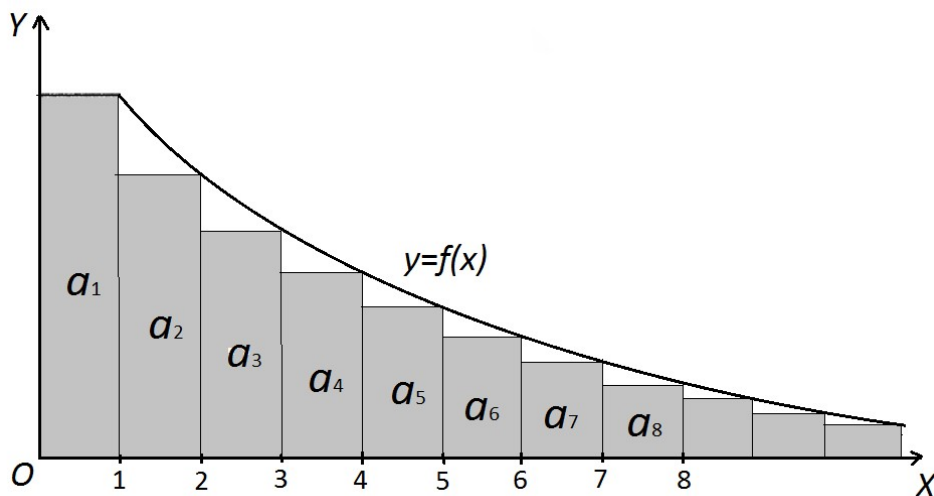


Рис. 1

Площі зафарбованих прямокутників на рис. 1 чисельно дорівнюють членам ряду $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Прямокутники утворюють зафарбовану східчасту фігуру на рисунку. Часткові суми ряду, отже, не перевищують площі східчастої фігури, котра, своєю чергою, не перевищує площі нескінченної смуги під графіком функції $f(x)$. А площа нескінченної смуги під графіком – це невластний інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Таким чином, часткові суми ряду з невід’ємними членами обмежені інтегралом $\int_0^{+\infty} f(x)dx < \infty$, і з теореми 1 випливає, що ряд – збіжний.

Припустимо, тепер, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. Члени ряду утворюють зафарбовану східчасту фігуру на рис. 2. Оскільки ряд збіжний, то площа цієї фігури

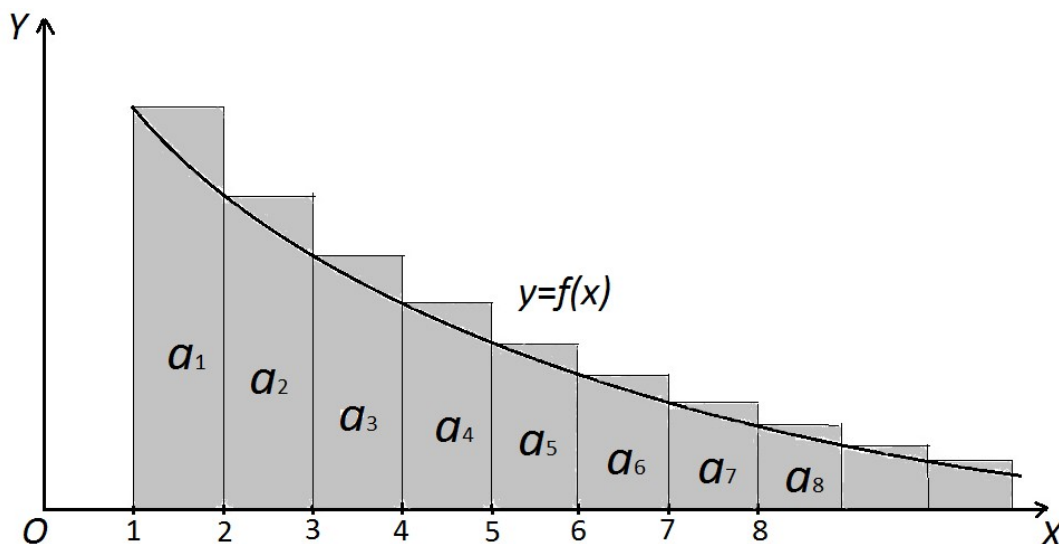


Рис. 2

скінчена. Отже, площа нескінченної смуги під графіком функції $f(x)$ тим паче скінчена, бо вона менша за площу східчастої фігури на рис. 2. В такому разі невластний інтеграл від додатної функції $\int_1^{+\infty} f(x)dx < \infty$, тобто цей інтеграл – збіжний. Теорему доведено.

Приклад 1. Розглянемо узагальнений гармонічний ряд:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots, \quad (2)$$

α – дійсне число. Члени цього ряду дорівнюють значенням при натуральних значеннях змінної x функції $f(x) = 1/x^\alpha$, яка задовольняє всі умови теореми 2.

Невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається тоді й тільки тоді, коли $\alpha > 1$. З теореми 2, таким чином, випливає, що ряд (2) збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$.

Зауваження. Природно, теорема 2, як і всі твердження щодо збіжності рядів, залишається слушною, якщо сумування в ряді починати не з $n = 1$, а з будь-якого фіксованого натурального значення $n = N$. Відповідний невластний інтеграл у такому разі перетворюється на $\int_N^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 2. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Відповідно до теореми 2, збіжність цього ряду еквівалентна збіжності інтеграла

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}.$$

Як бачимо, цей інтеграл – розбіжний, отже ряд теж розбігається.

§ 3. Абсолютна й умовна збіжність.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд, складений із модулів його членів: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 1 (Про збіжність абсолютно збіжного ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний, то він збіжний.

Доведення. Нехай ряд із модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – збіжний. Тоді, за критерієм Коші збіжності ряду, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N , таке що для будь-яких натуральних n, m , котрі задовольняють умову $m > n \geq N$ виконується нерівність $\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$. Тоді тим паче

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon,$$

і, відповідно до того ж таки критерію Коші, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. Теорему доведено.

Приклад 1. Ряд $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$ збіжний, більш того, збіжний абсолютно, бо ряд, складений з модулів $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ збігається як узагальнений гармонічний ряд із $\alpha = 2 > 1$.

Твердження, обернене до теореми 1, не є слушним: існують збіжні ряди, які не є абсолютно збіжними. Прикладом такого ряду може слугувати **ряд Лейбніца**:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

Ряд Лейбніца збігається, але не є абсолютно збіжним. Те, що він не абсолютно збіжний випливає з того, що ряд модулів $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ – розбіжний гармонічний ряд.

Обґрунтуємо збіжність ряду Лейбніца. Його члени $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ задовольняють умови:

- 1) знак кожного члена a_{n+1} протилежний знаку попереднього a_n ;
- 2) для будь-якого n $|a_{n+1}| < |a_n|$, тобто $|a_n|$ монотонно спадає з ростом n ;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Розглянемо послідовність часткових сум $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ ряду Лейбніца. З умов 1-3 випливає, що (див. рис. 1) s_{n+1} завжди лежить між s_{n-1} та s_n (кожна часткова сума, починаючи з третьої лежить між двома попередніми).

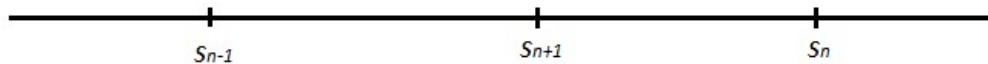


Рис. 1

Розглянемо послідовність вкладених відрізків: $[s_1, s_2], [s_2, s_3], \dots, [s_{n-1}, s_n], \dots$. Кожен відрізок, починаючи з другого, міститься у попередньому, і довжина кожного такого відрізка дорівнює $|s_n - s_{n-1}| = a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Відповідно до леми про вкладені відрізки, ці відрізки містять одну єдину спільну точку $s \in [s_{n-1}, s_n]$ $n = 1, 2, 3, \dots$. Оскільки довжина відрізка $[s_{n-1}, s_n] \rightarrow 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, послідовність часткових сум ряду збіжна, і ряд Лейбніца збіжний.

Збіжні ряди, що не є абсолютно збіжними називаються **умовно збіжними**. Таким чином, ряд Лейбніца – умовно збіжний.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **знакозмінним**, якщо знак кожного члена протилежний знаку наступного. Тобто для будь-якого натурального n знак a_n протилежний знаку a_{n+1} .

Теорема 2 (Ознака Лейбніца збіжності ряду). Нехай члени знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ задовольняють дві умови:

- 1) послідовність модулів членів ряду монотонно спадає (для будь-якого натурального n $|a_{n+1}| < |a_n|$);
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Замість доведення теореми зауважимо, що, обґрунтовуючи збіжність ряду Лейбніца, ми користувались, по-перше, знакозмінністю, по-друге, тим, що модуль кожного члена більший за модуль наступного, і, по-третє, тим, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Тож, теорему 2 можна довести, дослівно повторюючи доведення збіжності ряду Лейбніца.

Приклад 2. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, відповідно до ознаки Лейбніца, збігається. Але ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, складений із модулів його членів, як ми бачили в прикладі 2 попереднього параграфа, розбіжний. Тож, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ збігається умовно.

§ 4. Ознаки порівняння.

Теорема 1 (Перша ознака порівняння). Нехай усі члени двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ задовольняють нерівність

$$|a_n| \leq b_n. \quad (1)$$

Тоді, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – теж збіжний, причому абсолютно.

Доведення. З нерівності (1) випливає, що всі $b_n \geq 0$. Тоді, за критерієм Коші збіжності ряду, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число N , таке що для будь-яких двох натуральних $n, m, m > n \geq N$, виконується нерівність

$$\sum_{k=n+1}^m b_k < \varepsilon.$$

Тоді, за нерівністю (1),

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon,$$

і за тим-таки критерієм Коші ми бачимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – абсолютно збіжний.

Приклад 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$ – абсолютно збіжний, бо модулі його членів

$$\left| \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \right| = \frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

а сума нескінченної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – збіжний ряд.

Зауваження 1. Оскільки будь-яке скінченне число членів ряду не впливають на факт його збіжності або розбіжності, теорема 1 залишається слушною, якщо нерівність (1) виконується для всіх n , починаючи з деякого номера N_0 .

Теорема 2 (Друга або гранична ознака порівняння). Нехай усі члени двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – додатні: $a_n > 0, b_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

і $0 < c < +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний тоді й тільки тоді, коли таким є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доведення. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – збіжний. Задамося довільним $\varepsilon > 0$. За означенням границі послідовності, існує такий номер N_0 , що для всіх натуральних $n > N_0$ виконується нерівність $\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$, а отже

$$\frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon,$$

або

$$a_n < (c + \varepsilon)b_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (c + \varepsilon)b_n$, очевидно, збіжний, тоді, за теоремою 1 (див. також зауваження 1),

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж збігається.

Нехай, тепер, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний. Задамося $\varepsilon > 0$, таким що $c - \varepsilon > 0$. За означенням границі послідовності, існує такий номер N_0 , що для всіх натуральних $n > N_0$ виконується нерівність $\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$, а отже

$$c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n},$$

або

$$b_n < \frac{a_n}{c - \varepsilon}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c - \varepsilon}$, очевидно, збіжний, тоді з теореми 1 випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, усі члени яких – додатні, задовольняють необхідну умову збіжності ряду ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$), і при цьому $a_n \sim b_n$ коли $n \rightarrow \infty$. Тоді збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ еквівалентна збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Справді, еквівалентність $a_n \sim b_n$, означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, отже, відповідно до теореми 1, кожен із цих рядів збігається тоді й тільки тоді, коли збігається другий.

Приклад 2. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - 1}$. Для цього розглянемо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2 - 1} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2},$$

тож, відповідно до граничної ознаки порівняння, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - 1}$ – теж збіжний.

Приклад 3. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$. Для цього розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Цей, другий, ряд розбігається, бо це – частинний випадок узагальненого гармонічного ряду з $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$. За першою важливою границею

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \rightarrow \infty,$$

тож, відповідно до наслідку, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбігається.

Теорема 3 (Ознака Даламбера). Нехай для ряду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q. \quad (3)$$

Тоді ряд (2) збігається, причому абсолютно, якщо ця границя $q < 1$, і розбігається, якщо $q > 1$.

Доведення. Доведення ознаки Даламбера спирається на порівнянні з геометричною прогресією. Нехай $q < 1$. Зафіксуємо довільне $\rho, q < \rho < 1$. Зі співвідношення (3) випливає, що починаючи з деякого номера N

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \rho.$$

У такому разі можемо написати

$$\begin{aligned} |a_{N+1}| &< |a_N| \rho, \\ |a_{N+2}| &< |a_{N+1}| \rho < |a_N| \rho^2, \\ |a_{N+3}| &< |a_{N+2}| \rho < |a_N| \rho^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким чином, члени ряду

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \dots \quad (4)$$

менші за відповідні члени ряду

$$|a_N| + |a_N| \rho + |a_N| \rho^2 + |a_N| \rho^3 + \dots \quad (5)$$

Ряд (5) – збіжний як сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником за модулем меншим одиниці. Тоді, з першої ознакою порівняння випливає збіжність ряду (4). У такому разі (див. зауваження 1), ряд (2) – справді збіжний, причому абсолютно.

Нехай, тепер, $q > 1$. Тоді, починаючи з деякого моменту $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, отже $|a_{n+1}| > |a_n|$, що суперечить необхідній умові збіжності ряду, і ряд (2) не може збігатися. Теорему доведено.

Приклад 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ – збіжний, оскільки

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Приклад 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ – збіжний, оскільки

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Приклад 6. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^{3n}}$ – розбіжний, бо для нього

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{2^{3n+3}} : \frac{(n+1)!}{2^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{2^{3n+3}} \cdot \frac{2^{3n}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{8} = +\infty > 1.$$

Зауваження 2. Якщо, обчислюючи границю (3), одержуємо $q = 1$, ряд (2) може як збігатися, так і розбігатися. Наприклад, із двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n$, перший

збігається (як узагальнений гармонічний ряд із $\alpha = 2 > 1$), другий розбігається (бо не задовольняє необхідну умову збіжності ряду). Але для обох цих рядів границя (3) дорівнює 1.

Теорема 4 (Ознака Коші). Нехай для ряду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (6)$$

існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q. \quad (7)$$

Тоді ряд (6) збігається, причому абсолютно, якщо ця границя $q < 1$, і розбігається, якщо $q > 1$.

Доведення. Доведення ознаки Коші, так само спирається на порівнянні з геометричною прогресією. Нехай $q < 1$. Зафіксуємо довільне ρ , $q < \rho < 1$. Зі співвідношення (7) випливає, що починаючи з деякого номера N

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho,$$

тобто

$$|a_n| < \rho^n.$$

Таким чином, починаючи з номера N модулі членів ряду (6) не перевищують членів збіжного ряду $\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots$. У такому разі ряд (6) – справді збіжний, причому абсолютно.

Нехай, тепер, $q > 1$. Тоді, починаючи з деякого моменту $|a_n| > 1$, ряд (6) не задовольняє необхідну умову збіжності, і, отже, не може збігатися. Теорему доведено.

Приклад 7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$ – збіжний, оскільки

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Зауваження 3. Якщо, обчислюючи границю (7), одержуємо $q = 1$, ряд (6) може як збігатися, так і розбігатися. Щоб переконатися в цьому, достатньо обчислити границю (7) для рядів, якими проілюстровано зауваження 2.

§ 5. Групування та переставлення членів ряду.

Маючи справу зі скінченними сумами, ми звикли, члени що в сумі можна довільним чином переставляти та групувати (розставляти дужки). Зі скінченими рядами ситуація дещо інша. Розглянемо, наприклад, розбіжний ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

і згрупувавши його члени (розставивши дужки) одержимо ряд, який збігається

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots,$$

і сума якого дорівнює нулю. Втім, для збіжних рядів, операція групування право-
мірна.

Теорема 1 (Про групування членів збіжного ряду). Якщо в збіжному ряді

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

одержимо новий збіжний ряд, сума якого не відрізняється від суми ряду (1).

Ми не будемо давати детального доведення теореми 1, натомість проілюс-
труємо його основну ідею. Розставимо в якийсь спосіб дужки в ряді (1). Одержимо
ряд

$$(u_1 + u_2) + (u_4 + u_5 + u_6) + (u_7 + u_8) + \dots,$$

послідовність часткових сум якого

$$s_1 = u_1 + u_2, \quad s_2 = u_1 + u_2 + u_4 + u_5 + u_6,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8, \dots$$

є підпослідовністю послідовності часткових сум ряду (1), отже збігається до тієї
самої границі.

Для того, щоб у довільним чином переставляти члени ряду, самої лише
збіжності недостатньо. Потрібно вимагати абсолютну збіжність.

Теорема 2 (Про переставлення членів абсолютно збіжного ряду). Нехай
ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

збігається абсолютно, ряд

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots + u'_n + \dots \quad (3)$$

одержано з (2) довільним переставленням членів. Тоді ряд (3) теж збігається абсо-
лютно, і його сума дорівнює сумі ряду (2).

Доведення. Обґрунтуємо, спочатку абсолютну збіжність ряду (3). Розгля-
немо ряди

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (4)$$

$$|u'_1| + |u'_2| + |u'_3| + \dots + |u'_n| + \dots. \quad (5)$$

Ряд (4) із невід'ємними членами збігається за умовою, отже послідовність його
часткових сум – обмежена. Оскільки члени ряду (5) є члени ряду (4), взяті в іншо-
му порядку, то кожна часткова сума ряду (5) не перевищує деякої часткової суми
ряду (4). Отже послідовність часткових сум ряду (5) теж обмежена, отже цей ряд
збіжний, а ряд (3) – абсолютно збіжний.

Обґрунтуємо тепер рівність сум рядів (2) і (3). Нехай s_n, s'_n – часткові суми
рядів (4), (5) відповідно:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (6)$$

$$s'_n = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n. \quad (7)$$

Оскільки ряд (4) – збіжний, його залишок прямує до нуля:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + |u_{m+3}| + \dots) = 0.$$

Задамося довільним $\varepsilon > 0$ і підберемо m , так щоб

$$|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + |u_{m+3}| + \dots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Візьмемо натуральне N , таке що для всіх номерів $n > N$ члени $u_1, u_2, \dots, u_m$ містилися в обох сумах (6) і (7). Тоді при обчисленні різниці між сумами (6) і (7) ці члени скорочуються, і

$$|s_n - s'_n| \leq 2(|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + |u_{m+3}| + \dots) < \varepsilon.$$

Оскільки ε – довільне, робимо висновок, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - s'_n| = 0$, отже ряди (2) та (3) дійсно збігаються до однієї й тієї самої суми. Теорему доведено.

Зауваження. Для умовно збіжного ряду теорема 2 не виконується. Переставляючи члени умовно збіжного ряду можна добитися зміни його суми чи навіть перетворити його на розбіжний.

Задачі

Користуючись інтегральною ознакою збіжності, дослідити на збіжність ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\frac{3}{2}} n}.$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln \ln n}.$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \sqrt[3]{\ln \ln n}}.$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln^5 \ln n}.$

Користуючись першою або другою ознаками порівняння, дослідити на збіжність ряд.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 + 1}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n\sqrt{n}-1}.$
9. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{n-2}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+2)^{3^n}}.$
11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^{\frac{5}{2}}-1}.$

Користуючись ознакою Коші або ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряд.

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 2^n}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5^n}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{7^n}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+1)!}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{3n-1} \right)^n.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^2-5n+1}{3n-1} \right)^{2n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n-2}{2n^2-1} \right)^{2n}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-9n+2}{3n^5-n^3} \right)^n.$$

Встановити, які з рядів абсолютно збіжні, які збіжні умовно, які розбіжні.

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctg n.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}.$$

Список використаної літератури

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1977. – 872 с.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник. Ч. 1. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Збірник задач. – К.: Ігнатекс – Україна, 2011. – 480 с.

Зміст

Вступ	3
§ 1. Збіжні ряди: основні означення та факти.	4
§ 2. Збіжність рядів із невід’ємними членами. Інтегральна ознака збіжності.	7
§ 3. Абсолютна й умовна збіжність.	9
§ 4. Ознаки порівняння.	11
§ 5. Групування та переставлення членів ряду.	15
Задачі	17
Список використаної літератури	19

Посібник до вивчення курсу
«Вища математика». Числові ряди

Автор:

Пасько Анатолій Миколайович

Підписано до друку	2021 р.	Формат 60×84/24.	Папір офсетний.
Ум. друк. арк.	Тираж 20 пр.	Зам. №	

Видавництво і друкарня ПП «Ліра ЛТД»
49107, м. Дніпро, вул. Наукова, 5
Свідоцтво про внесення до Держреєстру
ДК №6042 від 26.02.2018.