Міністерство освіти і науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу та оптимізації

Навчальний посібник «Задачі з параметрами в шкільному курсі математики»

Дніпро

2023

Даний навчальний посібник призначено для студентів спеціальності «Середня освіта (Математика)», що вивчають дисципліну «Шкільні задачі з параметрами». Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості, що необхідні для розв'язання задач з параметрами різних типів, приклади розв'язання характерних задач кожного типу та набір задач для самостійного розв'язання, що може бути використаний для індивідуальних завдань студентів денної та заочної форм навчання або для проведення практичних занять та контрольних робіт.

Також цей навчальний посібник може бути використаний шкільними викладачами математики для формування у школярів навичок розв'язання задач з параметрами та школярами для самостійного отримання практичного досвіду розв'язання задач з параметрами.

Навчальний посібник сформований на основі посібника з дисципліни «Задачі з параметром» укладеного авторами в 2020 році, який його доповнює та розширює.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № від р.)

В авторській редакції

Навчальний посібник
"Задачі з параметрами в шкільному курсі математики"

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Р. О. Біліченко,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Т.Ю. Лескевич.

© Біліченко Р. О., Лескевич Т. Ю., 2023

Вступ

Задачі з параметрами – це різновид математичного рівняння, нерівності, системи рівнянь або нерівностей (далі просто задачі), які окрім невідомої змінної x (в системах невідомих змінних є декілька, але для спрощення подальшого викладання будемо вважати, що маємо одну невідому x) містять ще одну змінну, яку, як правило, позначають буквою a і називають параметром. Ця змінна має особливу роль: вона може набувати будь-яких значень, але вважається відомою. У зв'язку з цим, як правило, виникає ситуація, де у випадку, коли параметр набуває деяких особливих значень (залежно від конкретної задачі) не може бути використаний загальний підхід до розв'язання (наприклад, якщо виконується ділення на вираз, що дорівнює нулю). Для того, щоб отримати відповідь, в кожному з таких випадків замість довільного значення параметра підставляють це особливе значення і розв'язують задачу, що вже містить тільки невідому змінну. Для тих значень змінної, які не є особливими, розглядають загальне розв'язання, яке дає у якості відповіді значення невідомої змінної, що є функцією від параметра при розв'язанні рівняння, або інтервал, якому належить змінна, і границі якого є функціями від параметра у випадку розв'язання нерівності. В якості відповіді в задачах з параметрами для кожного значення параметра (якщо в умові не вказано інше) подається відповідна форма розв'язку.

Задачі з параметрами можна умовно поділити на два типи. Перші, в яких треба розв'язати задачу деякого типу з тих, що вивчаються в шкільній програмі. Для розв'язання таких задач використовуються ті самі підходи, що і до розв'язання задач, які не містять параметр, за умовою окремого розгляду особливих значень. В даному навчальному посібнику наведені всі типи таких задач.

До другого типу задач з параметрами відносяться ті, в яких на невідому змінну накладають певні умови та вимагають знайти ті значення параметра, при яких такі умови виконуються. В цих задачах у відповідь писати значення самої

змінної не треба, треба тільки вказати відповідні значення параметра. Як правило, в задачах такого типу не треба знаходити розв'язок, а треба використати деякий особливий метод, який не застосовувався до розв'язання задач без параметра. До задач такого типу в даному навчальному посібнику відносяться задачі на застосування теореми Вієта, задачі на застосування властивостей квадратного тричлена, задачі на використання графічного методу та задачі на використання методу симетрії.

Дисципліна «Шкільні задачі з параметрами» покликана навчити студентів розв'язувати задачі з параметрами різних типів, звернути увагу на особливості, що при цьому виникають для кожного типу задач та навчити новим потрібним для цього підходам. Також у студентів повинні виробитися методичні підходи до навчання школярів навичкам розв'язання задач з параметрами. Досягненню всі цих цілей сприяє даний навчальний посібник.

Зміст

Вступ
1. Лінійні рівняння 6
2. Лінійні нерівності 9
3. Раціональні рівняння 11
4. Раціональні нерівності 15
5. Квадратні рівняння 17
6. Квадратні нерівності 21
7. Застосування теореми Вієта до розв'язання задач з параметрами 29
8. Застосування властивостей квадратного тричлена до розв'язання задач з параметрами 37
9. Рівняння, що містять знак модуля 47
10. Ірраціональні рівняння 55
11. Ірраціональні нерівності 57
12. Тригонометричні рівняння 61
13. Показникові рівняння 64
14. Показникові нерівності 66
15. Логарифмічні рівняння 71
16. Логарифмічні нерівності 73
17. Графічний метод 76
18. Використання симетрії при розв'язанні задач з параметрами 87
19. Системи лінійних рівнянь з параметрами 94
20. Приклади задач із варіантів ЗНО 97
21. Додаток. Метод інтервалів для раціональних нерівностей 110
22. Додаток. Про побудову графіків функцій за допомогою геометричних перетворень 116
Бібліографічний список використаної літератури 124

1. Лінійні рівняння

Будь-яке лінійне рівняння (алгебраїчне рівняння першого степеня) може бути зведено до найпростішого виду

$$ax = b \qquad (1)$$

де x – невідома величина, a та b – задані числа. В залежності від значень a та b можливі наступні випадки розв'язання рівняння (1):

1) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{b}$ – єдиний корінь рівняння;

2) якщо $a = 0$, то рівняння (1) перетвориться на рівняння

$$0 \cdot x = b,$$

для остаточного розв'язання якого треба врахувати можливі значення числа b:

a. якщо $b \neq 0$, то рівняння (1) не має коренів;

b. якщо $b = 0$, то x – будь-яке число.

Лінійним рівнянням з параметром a відносно змінної x будемо називати рівняння виду

$$f(a) \cdot x = g(a), \qquad (2)$$

де $f(a)$ та $g(a)$ – функції, що залежать від a, x – невідома величина.

При розв'язання рівняння (2) треба

1) знайти такі значення a, при яких $f(a) \neq 0$, для таких значень параметра $x = \frac{g(a)}{f(a)}$ – єдиний корінь рівняння;

2) знайти такі значення a, при яких $f(a) = 0$ та встановити для цих значень параметра, чому дорівнює $g(a)$:

1) якщо $g(a) \neq 0$, то рівняння (2) не має коренів;

2) якщо $g(a) = 0$, то x – будь-яке число.

Зауваження: для тих a, для яких $f(a) \neq 0$ розглядати окремо випадок $g(a) = 0$ не треба, оскільки цей випадок вже враховано в пункті 1).

Приклад 1. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$$

Розв'язання. Шляхом рівносильних перетворень зведемо задане рівняння до виду (8)

$$(a^2 - 4a)x = 2a^2 + 6a,$$

де $f(a) = a^2 - 4a = a(a-4)$, $g(a) = 2a^2 + 6a$.

Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) $f(a) \neq 0$, це вірно при $a(a-4) \neq 0$ тобто при $a \neq 0$ та $a \neq 4$. Для таких значень параметра маємо розв'язок $x = \frac{2a^2+6a}{a^2-4a} = \frac{2a(a+6)}{a(a-4)} = \frac{2(a+6)}{a-4}$.

2) $f(a) = 0$, це вірно при $a(a-4) = 0$ тобто при $a = 0$ або при $a = 4$. В цьому випадку ділити на $f(a)$ не можна, тому кожне з цих значень параметра окремо підставимо в задане рівняння.

a. При $a = 0$ рівняння перетвориться на рівняння $0 \cdot x = 0$, розв'язком якого є будь-яке число.

b. При $a = 4$ рівняння перетвориться на рівняння $0 \cdot x = 56$, яке не має коренів.

Відповідь: якщо $a \neq 0$ та $a \neq 4$, то $x = \frac{2(a+6)}{a-4}$,

якщо $a = 0$, то x – будь-яке число,

якщо $a = 4$, то рівняння немає коренів.

Задачі для самостійної роботи.

1. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

1.1. $(a+1)x = 4$

1.2. $(a^2 - 4)x = a - 2$

1.3. $a^2x + 50 - 35x = 2a^2 - 2ax$

1.4. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$

1.5. $(2a + 10)x = a^2 + a - 20$

1.6. $ax - 6 = 2a^2x + 3a$

1.7. $(a^2 - 5a)x = a^2 + 5a$

1.8. $ax + 4 = a^2 - 2x$

1.9. $(a^3 + 8)x = 6a^2 + 11a - 2$

1.10. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$

1.11. $(3a^2 + 2a)x = a - 2$

1.12. $7ax + 2a^2 = a^2x - 4a$

1.13. $27x + 5a^2 + 3 = a^3x + 16a$

1.14. $(a + 3)x = a^2 - 9$

1.15. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$

1.16. $ax - a^2 = x$

1.17. $(a^2 - a - 6)x = (a - 3)(a + 1)$

1.18. $a^2x - 6a = 2a^2 + 4ax$

1.19. $3ax - 4a = 9x + a^2 - 21$

1.20. $1 - x = a - a^2x$

2. Лінійні нерівності

При розв'язанні лінійних нерівностей з параметром виду

$$f(a) \cdot x \leq g(a), f(a) \cdot x < g(a), f(a) \cdot x \geq g(a), f(a) \cdot x > g(a),$$

де $f(a)$ та $g(a)$ – функції, що залежать від параметра a, x – невідома величина, треба додатково розглядати випадки, при яких $f(a)$ має різні знаки, оскільки при діленні на додатне число знак нерівності не змінюється, а при діленні на від'ємне число нерівність змінює знак на протилежний.

Наприклад, для нерівності виду

$$f(a) \cdot x < g(a)$$

Виникають наступні випадки:

1) для тих значень a, для яких $f(a) > 0$, нерівність перетворюється на

$$x < \frac{g(a)}{f(a)};$$

2) для тих значень a, для яких $f(a) < 0$, нерівність перетворюється на

$$x > \frac{g(a)}{f(a)};$$

3) для тих значень a, для яких $f(a) = 0$ отримаємо нерівність $0 < g(a)$, яка може бути або правильною або неправильною числовою нерівністю в залежності від значення $g(a)$, тоді початкова нерівність або буде правильною при будь-якому дійсному значенні x або буде мати пусту множину розв'язків відповідно.

Приклад 2. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$(a + 3)x \geq a^2 + 2$$

Розв'язання. Для цього рівняння $f(a) = a + 3$, $g(a) = a^2 + 2$.

Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) $f(a) > 0$, це вірно при $a > -3$. Для таких значень параметра задана нерівність рівносильна нерівності $x \geq \frac{a^2+2}{a+3}$.

2) $f(a) < 0$, це вірно при $a < -3$. В цьому випадку виникає необхідність ділити на вираз, що є від'ємним, тому для таких значень параметра задана нерівність рівносильна нерівності $x \leq \frac{a^2+2}{a+3}$. Зауважимо, що при цьому знак $f(a)$ не змінюється на протилежний.

3) $f(a) = 0$, це вірно при $a = -3$. В цьому випадку задана нерівність перетворюється на $0 \geq 11$, що є хибним незалежно від значення x, тому задана нерівність не має розв'язків.

Відповідь: якщо $a < -3$, то $x \leq \frac{a^2+2}{a+3}$,

якщо $a = -3$, то немає розв'язків,

якщо $a > -3$, то $x \geq \frac{a^2+2}{a+3}$.

Задачі для самостійної роботи.

2. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

2.1. $(a+1)x < a-2$

2.2. $a(a-2)x \leq a-5$

2.3. $(a-1)x > a^2-a$

2.4. $(a^2-4)x \geq a+2$

2.5. $(a-4)(a+3)x \leq a(a+2)$

2.6. $(a-2)x \geq a^2+2a$

2.7. $ax < a^2$

2.8 $(a-3)(a+2)^3x \leq (a+2)^2$

2.9. $(a^2-9)x > a^2+9$

2.10. $(a+3)x < (a-2)(a+4)$

2.11. $(a-3)^2x > a-3$

2.12. $(a^2+7a)x \leq a^2$

2.13. $(a+1)(a-5)x < a^2-5a$

2.14. $(a+4)x \geq (a+4)(a-3)$

2.15. $(a^3+8)x > a-3$

2.16. $a(a^2+4)x \geq a+2$

2.17. $(a-10)x > a+5$

2.18. $(a-2)(a+6)x \leq a^2+1$

2.19. $(a^2-1)x < a-8$

2.20. $(a^2+3a)x \geq a^2-9$

3. Раціональні рівняння

Будь-яке раціональне рівняння шляхом зведення до спільного знаменника може бути зведено до вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \qquad (3)$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени змінної x, які можуть залежати від параметра.

Рівняння такого виду зручно звести до рівносильної системи

$$\begin{cases} P(x) = 0; \\ Q(x) \neq 0, \end{cases} \qquad (4)$$

яка дозволить отримати одразу залежність змінної x від параметра і необхідні обмеження на значення параметра.

Приклад 3. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\frac{(x-1)(ax-1)}{(x-a)(x+3)} = 0$$

Розв'язання. Зведемо рівняння до системи (4)

$$\begin{cases} (x-1)(ax-1) = 0 \\ x - a \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

Оскільки перше рівняння системи має два корені, то замість системи отримаємо сукупність двох систем, яку, з метою полегшення записів, будемо розглядати як два окремі випадки.

1) Перша система матиме вигляд

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - a \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x \neq a \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Очевидно, що при $x = 1$ остання нерівність виконується автоматично. Підставивши знайдене значення $x = 1$ в другу нерівність, отримаємо обмеження на значення параметра, при яких даний корінь існує.

$$\begin{cases} x = 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Трактувати отриману систему треба наступним чином: $x = 1$ є коренем при всіх значеннях параметра крім $a = 1$.

2) Друга система матиме вигляд

$$\begin{cases} ax - 1 = 0 \\ x - a \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

При розв'язання першого рівняння, яке є лінійним, ми стикаємось з необхідністю ділити на вираз, що містить параметр. Як було показано в розділі 1 нам треба розглядати два випадки.

a. Якщо $a = 0$, то перше рівняння системи (5) перетворюється на $0 \cdot x - 1 = 0$, що немає розв'язків.

b. Якщо $a \neq 0$, то перше рівняння системи (5) має розв'язок $x = \frac{1}{a}$. Тоді система (5), з урахуванням умови $a \neq 0$ перетворюється на наступну систему:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a} \\ a \neq 0 \\ \dfrac{1}{a} - a \neq 0 \\ \dfrac{1}{a} + 3 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{1}{a} \\ a \neq 0 \\ \dfrac{1-a}{a} \neq 0 \\ \dfrac{1+3a}{a} \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{1}{a} \\ a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Остаточно ми отримали, що $x = \frac{1}{a}$ є розв'язком заданого рівняння при всіх значеннях параметра, крім $a = 0$, $a = 1$ та $a = -\frac{1}{3}$.

Поєднуючи обидва випадки, бачимо, що при $a = 1$ рівняння не має коренів.

Відповідь: якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$ та $a \neq -\frac{1}{3}$, то $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{a} \end{array}\right.$

якщо $a = 0$ та $a = -\frac{1}{3}$, то $x = 1$,

якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів.

Приклад 4. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x^2 - ax} - \frac{1}{x^2 + ax} = \frac{a}{x^2 - a^2}$$

Розв'язання. Зведемо рівняння до вигляду (3)

$$\frac{1}{x(x-a)}-\frac{1}{x(x+a)}-\frac{a}{(x-a)(x+a)}=0$$

$$\frac{a(2-x)}{x(x-a)(x+a)}=0$$

Для отриманого рівняння система (4) матиме вигляд

$$\begin{cases} a(2-x)=0 \\ x\neq 0 \\ x-a\neq 0 \\ x+a\neq 0 \end{cases}$$

Перша рівність вірна в двох випадках:

1) $a=0$, тоді x може приймати будь-яке значення, крім $x=0$, яке не задовольняє решту нерівностей.
2) $x=2$, тоді друга нерівність виконується, а решта дає розв'язок разом з наступними обмеженнями на значення параметра, які виникають при підстановці значення $x=2$ в третю та четверту нерівність

$$\begin{cases} x=2 \\ a\neq 2 \\ a\neq -2 \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a\neq -2$, $a\neq 2$ та $a\neq 0$, то $x=2$,

якщо $a=0$, то x може приймати будь-яке значення, крім $x=0$,

якщо $a=-2$ та $a=2$ то рівняння немає коренів.

Задачі для самостійної роботи.

3. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

3.1. $\frac{x+3}{x-a}=0$

3.2. $\frac{x-a}{x+1}=0$

3.3. $\frac{a(x-5)}{x-a}=0$

3.4. $\frac{(x-a)(x-2)}{x+2}=0$

3.5. $\frac{x-6}{(x-a+1)(x+4)}=0$

3.6. $\frac{a^2x-4}{x-1}=0$

3.7. $\frac{x-2}{x+a}=0$

3.8. $\frac{x+a+3}{x-7}=0$

3.9. $\frac{(a-1)(x-a)}{x+4}=0$

3.10. $\frac{x+a}{(x-1)(x+5)}=0$

3.11. $\frac{(x-7)(x-2)}{x+a-1}=0$

3.12. $\frac{(x-a)(x+2)}{(x-1)(x+a)}=0$

3.13. $\frac{x^2-a^2}{x-3}=0$

3.14. $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-a)(x-a+3)}=0$

3.15. $\frac{(x+2a)(x-a)}{(x-6)(x+8)}=0$

3.16. $\frac{ax+2}{(x+4)(x-2)}=0$

3.17. $\frac{ax-9}{(x-a)(x-3)}=0$

3.18. $\frac{(x-2a)(x+4a)}{x-8}=0$

3.19. $\frac{(x-4)(x-1+a)}{a(x+6)}=0$

3.20. $\frac{(x-a)(x-2a)}{(x+a+2)(x-2)}=0$

4. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

4.1. $\frac{3}{x-a}-\frac{1}{x+a}=0$

4.2. $\frac{x+2}{x-4}=\frac{2x+a}{2x-a}$

4.3. $\frac{9x-7}{3x-2a}-\frac{4x-5}{2x-3a}=1$

4.4. $\frac{ax-1}{2x+1}=\frac{ax+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2}$

4.5. $\frac{6}{x^2+ax}-\frac{3}{x^2-ax}+\frac{10}{x^2-a^2}=0$

4.6. $\frac{3a}{x-4}-\frac{2}{x+4}=0$

4.7. $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5a}{x-2a}=1$

4.8. $\frac{1}{x^2-6x}+\frac{a+1}{x^2+6x}=\frac{2a}{x^2-36}$

4.9. $\frac{x^2+a}{x^2-1}=\frac{x-2a}{x+1}-\frac{5}{1-x}$

4.10. $\frac{x-2a}{x+a}=\frac{2x-1}{2x+1}$

4.11. $\frac{1}{x-a}+2=\frac{2-ax}{x-a}$

4.12. $\frac{x-1}{x+2a}-\frac{x-7a}{3x+6a}=0$

4.13. $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{2a-x}{x-2}=0$

4.14. $\frac{x+3a}{x^2+2x}-\frac{x-a}{x^2-4}=0$

4.15. $\frac{3x-a}{x+7}-\frac{3x^2-ax}{x^2-49}=0$

4.16. $\frac{7a}{x^2-9}+\frac{3x-a}{x-3}=3$

4.17. $\frac{4}{(x+a)^2}-\frac{9}{(x-a)^2}=\frac{5}{a^2-x^2}$

4.18. $\frac{4a}{x^2+4x}+\frac{x+3}{2x^2-8x}=\frac{x+10a}{2x^2-32}$

4.19. $\frac{x-6a}{8-x}-\frac{x-4}{x-8}=0$

4.20. $\frac{x+4a}{x^2+x}-\frac{x+2a}{x^2-1}=0$

4. Раціональні нерівності

Будь-яка раціональна нерівність може бути зведена до однієї з нервностей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени змінної x, які можуть залежати також від параметра.

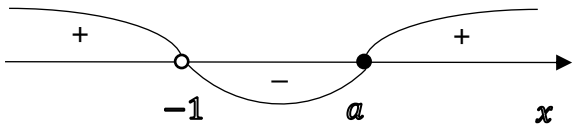
Для розв'язання нерівностей такого виду застосовується ***метод інтервалів***. Докладна інформація про алгоритм застосування методу інтервалів наведена у відповідному додатку даного посібника.

Приклад 5. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$\frac{x-a}{x+1} \geq 0$$

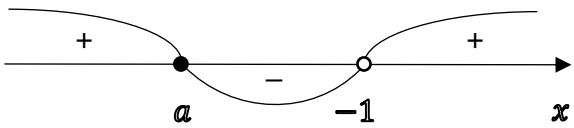
Розв'язання. Застосуємо метод інтервалів. Нуль чисельника $x = a$, нуль знаменника $x = -1$. При нанесенні нулів чисельника та знаменника на числову пряму виникає два випадка в залежності від того, яке з цих значень є більшим, тобто знаходиться правіше на числовій прямій. Розглянемо кожен випадок окремо.

1) $a > -1$, тоді



Оскільки нас цікавлять такі значення x, для яких вираз є додатним, то відповідь в цьому випадку $x \in (-\infty; -1) \cup [a; \infty)$.

2) $a < -1$, тоді



В цьому випадку відповідь буде мати наступний вигляд $x \in (-\infty; a] \cup (-1; \infty)$.

3) $a = -1$, тоді, підставивши замість a значення -1 в ліву частину нерівності, отримаємо нерівність $\frac{x+1}{x+1} \geq 0$ або при $x \neq -1$ числову нерівність $1 \geq 0$, яка є правильною для будь-якого значення змінної, окрім $x = -1$.

Відповідь: якщо $a > -1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup [a; \infty)$,

якщо $a < -1$, то $x \in (-\infty; a] \cup (-1; \infty)$,

якщо $a = -1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

Задачі для самостійної роботи.

5. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

5.1. $\frac{x}{x+2a} > 0$

5.2. $\frac{1}{x+2a} + \frac{1}{x} \leq 0$

5.3. $\frac{a}{x} - \frac{1}{x+1} < 0$

5.4. $\frac{x-a+1}{x+1} \geq 0$

5.5. $\frac{x+3a}{x-a} > 0$

5.6. $\frac{1}{x-2} < a$

5.7. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} \geq 0$

5.8. $\frac{(x-3)(x+3a)}{x+1} < 0$

5.9. $\frac{x+a}{x+4} \leq \frac{x-a}{x-2}$

5.10. $\frac{x^2(x-a+2)}{x-1} > 0$

5.11. $1 - \frac{x}{x+3a} < \frac{3}{x}$

5.12. $\frac{x-1}{(x+3)(x-5a)} > 0$

5.13. $\frac{x^2-2x}{x+a+3} \geq 0$

5.14. $\frac{x-a}{x-a+1} \leq 4$

5.15. $\frac{x^2-3a}{x-a} > x$

5.16. $\frac{ax}{ax+1} - \frac{1}{ax-1} \geq 1$

5.17. $\frac{(x-5)(x-a)}{(x-a+2)^2} < 0$

5.18. $\frac{x-3a}{x+2a+3} \leq \frac{x}{x+2}$

5.19. $\frac{x^2+a}{x^2-1} > 1$

5.20. $\frac{x}{x-a} < 5$

5. Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням є рівняння виду

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (6)$$

де a, b, c – задані числа, причому $a \neq 0$. Для розв'язання такого рівняння спочатку обчислюється дискримінант за формулою

$$D = b^2 - 4ac,$$

а потім, в залежності від отриманого значення D, обирається один з наступних випадків:

1) якщо $D \geq 0$, то рівняння (6) має корені, які обчислюються за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

2) якщо $D < 0$, то рівняння (6) не має коренів.

Зауваження. Замість випадку $D \geq 0$ можна розглядати два окремі випадки: $D > 0$ та $D = 0$, вважаючи в останньому випадку, що рівняння має єдиний корінь $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Якщо припустити, що в рівнянні (6) $a = 0$, то воно перетвориться на лінійне рівняння виду

$$bx + c = 0.$$

Коли мова йде про квадратні рівняння з параметрами, то коефіцієнти a, b, c є функціями, залежними від параметра. Тому будемо вважати, що квадратне рівняння з параметром a відносно змінної x має вигляд

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0, \qquad (7)$$

де коефіцієнти $f(a), g(a), h(a)$ – функції, що залежать від a, x – невідома величина.

В цьому випадку формула для дискримінанта матиме вигляд

$$D(a) = g^2(a) - 4f(a) \cdot g(a)$$

При розв'язання рівняння (7) треба

1) Знайти такі значення a, при яких $f(a) \neq 0$, для таких значень параметра рівняння є квадратним. Для цих значень параметра треба розглянути наступні випадки:

a. Якщо $D(a) \geq 0$, то рівняння має корені, що знаходяться за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D(a)}}{2f(a)}$$

b. Якщо $D(a) < 0$, то рівняння не має коренів.

2) Знайти такі значення a, при яких $f(a) = 0$, для таких значень параметра рівняння є лінійним. Кожне отримане з цієї умови значення параметра треба підставити в рівняння (7), і розв'язати лінійне рівняння, що вже не буде залежати від параметра.

Приклад 6. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$(3a - 11)x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$$

Розв'язання. Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) Якщо $(3a - 11) \neq 0$, тобто $a \neq 3\frac{2}{3}$, то рівняння є квадратним, тому для його розв'язку знайдемо вираз для дискримінанта

$$D(a) = (1 - a)^2 - 4(3a - 11) = 1 - 2a + a^2 - 12a + 44$$
$$= a^2 - 14a + 45$$

Тепер розглянемо два випадки, що пов'язані з існуванням коренів.

a) Коли $D(a) \geq 0$, тобто $a^2 - 14a + 45 \geq 0$, рівняння має корені. Розв'язуючи останню нерівність методом інтервалів отримаємо: $a \in (-\infty; 5] \cup [9; \infty)$. Поєднуючи отриману множину значень параметра з умовою $a \neq 3\frac{2}{3}$, остаточно отримаємо, що при $a \in (-\infty; 3\frac{2}{3}) \cup (3\frac{2}{3}; 5] \cup [9; \infty)$ рівняння має корені, що задаються формулою

$$x_{1,2} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 14a + 45}}{2(3a - 11)}$$

b) Коли $D(a) < 0$, тобто $a \in (5; 9)$, рівняння не має коренів. Всі отримані значення задовольняють умові $a \neq 3\frac{2}{3}$, тому при $a \in (5; 9)$ рівняння не має коренів.

2) Якщо $(3a - 11) = 0$, тобто $a = 3\frac{2}{3}$, то підставимо це значення параметра в вихідне рівняння. Отримаємо

$$-\frac{8}{3}x + 1 = 0,$$

звідки $x = \frac{3}{8}$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 3\frac{2}{3}) \cup (3\frac{2}{3}; 5] \cup [9; \infty)$, то

$$x_{1,2} = \frac{a-1\pm\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)},$$

якщо $a \in (5; 9)$, то рівняння не має розв'язків,

якщо $a = 3\frac{2}{3}$, то $x = \frac{3}{8}$.

Задачі для самостійної роботи.

6. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

6.1. $(9a + 1)x^2 + (13a + 1)x + 4a = 0$

6.2. $ax^2 - (2a + 1)x + 2 = 0$

6.3. $(3 - 2a)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$

6.4. $(5a - 19)x^2 + (a - 7)x - 1 = 0$

6.5. $a^2x^2 - 2ax + 3 = 0$

6.6. $(9a + 4)x^2 + (6a - 4)x + (a - 5) = 0$

6.7. $(a - 3)x^2 + (a + 3)x - 2 = 0$

6.8. $(25a + 3)x^2 + (20a + 5)x + 4a + 1 = 0$

6.9. $x^2 + 3ax + 7a^2 = 0$

6.10. $3ax^2 + (15a + 1)x + 12a + 1 = 0$

6.11. $(a - 3)x^2 - 2ax + a + 1 = 0$

6.12. $4ax^2 + (a - 4)x - 1 = 0$

6.13. $(9a^2 + a)x^2 + (10a + 1)x + 1 = 0$

6.14. $x^2 + (a - 5)x - (4a - 5) = 0$

6.15. $(a + 2)x^2 - (10a + 1)x + 25a - 3 = 0$

6.16. $a^2x^2 + 8ax - 3 = 0$

6.17. $(5a + 4)x^2 + (a - 1)x - 1 = 0$

6.18. $10ax^2 - (4a - 5)x - 2 = 0$

6.19. $(4 - 9a)x^2 - (12a + 7)x - 4a - 3 = 0$

6.20. $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$

6. Квадратні нерівності

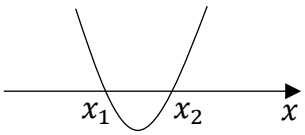
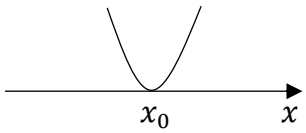
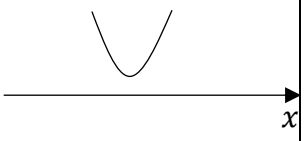
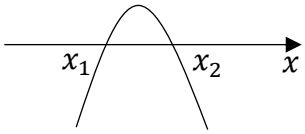
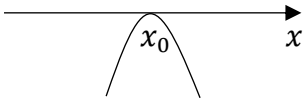
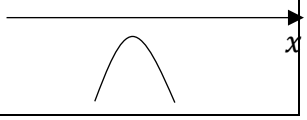
Квадратними нерівностями є нерівності виду

$$ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \leq 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,$$

де a, b, c – задані числа, причому $a \neq 0$. Для розв'язання таких нерівностей користуються схематичним зображенням квадратичної функції $y = y(x)$, що задається формулою

$$y = ax^2 + bx + c.$$

При побудові такого зображення виникають декілька випадків в залежності від знаків коефіцієнта a та дискримінанта, що обчислюється за формулою $D = b^2 - 4ac$. Всі можливі випадки наведені в наступній таблиці, де через x_1 та x_2 позначені корені рівняння, що обчислюються за формулою $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, а через x_0 – координата вершини параболи, що обчислюється за формулою $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$	**1)** 	**2)** 	**3)** 
$a < 0$	**4)** 	**5)** 	**6)** 

Після того, як для заданої нерівності побудовано одне з зображень квадратичної функції, задачу розв'язання квадратичної нерівності можна сформулювати наступним чином: знайти всі значення незалежної змінної x, для яких залежна змінна y має знак, який задано умовою. При цьому враховуємо, що точки графіка, що лежать вище осі Ox, задовольняють умову $y > 0$, точки графіка, що лежать нижче осі Ox, задовольняють умову $y < 0$, а точки графіка, що лежать на осі Ox, задовольняють умову $y = 0$.

Наприклад, якщо в нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$, виявилось, що $a > 0$ та $D > 0$, то ми маємо схематичне зображення графіка як у випадку 1), на якому обираємо всі точки графіка, що лежать не нижче осі Ox, тоді абсциси цих точок утворюють множину розв'язків нерівності $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.

Якщо в нерівності $ax^2 + bx + c > 0$, виявилось, що $a > 0$ та $D = 0$, то зображення графіка буде як у випадку 2), тоді умова $y > 0$ буде виконуватись для всіх точок, окрім точки з абсцисою x_0, в якій $y = 0$. Отже, розв'язком нерівності буде множина $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$.

А якщо в нерівності $ax^2 + bx + c < 0$ маємо що $a < 0$ та $D < 0$, то отримаємо випадок 6), в якому всі точки графіка знаходяться нижче осі Ox, тобто умова $y < 0$ виконується для всіх значень x, тому розв'язком нерівності є множина $x \in (-\infty; \infty)$.

В квадратних нерівностях з параметром коефіцієнти a, b, c можуть залежати від параметра, тому при деяких значеннях параметра може виникнути кожен з шести випадків схематичного зображення графіка функції. Всі ці випадки треба розглянути окремо. Однак, треба враховувати, що випадки 2), 3) та 5), 6) інколи дають однакові множини розв'язків, тому можуть бути поєднані в один випадок. Наприклад, в нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$ випадки 2) та 3) дають однакову множину розв'язків $x \in (-\infty; \infty)$, тому можуть бути поєднані в один випадок, але для цієї нерівності випадок 5) дає розв'язок $x = x_0$, а випадок 6) дає порожню множину розв'язків, тому ці випадки для даної нерівності не можуть бути поєднані.

Наведемо рекомендовану схему міркувань при розв'язанні нерівностей з параметрами виду

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) < 0, f(a)x^2 + g(a)x + h(a) > 0,$$
$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a) \leq 0, f(a)x^2 + g(a)x + h(a) \geq 0$$

1) Знайти дискримінант $D(a) = g^2(a) - 4f(a) \cdot g(a)$ та корені $x_{1,2} = \frac{-g(a) \pm \sqrt{D(a)}}{2f(a)}$ рівняння $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$.

2) Знайти такі значення a, при яких $f(a) > 0$, тоді гілки параболи напрямлені вгору. Далі розділити цю множину, якщо це можливо, на три частини, в кожній з яких для всіх значень параметра виконується одна з умов: $D(a) > 0$, $D(a) = 0$ або $D(a) < 0$. Ці випадки будуть відповідати схематичним зображенням графіків 1), 2) та 3) відповідно.
3) Знайти такі значення a, при яких $f(a) < 0$, тоді гілки параболи напрямлені вниз. Далі розділити цю множину, якщо це можливо, на три частини, в кожній з яких для всіх значень параметра виконується одна з умов: $D(a) > 0$, $D(a) = 0$ або $D(a) < 0$. Ці випадки будуть відповідати схематичним зображенням графіків 4), 5) та 6) відповідно.
4) Знайти такі значення a, при яких $f(a) = 0$. Всі такі значення треба підставити в вихідну нерівність і розв'язати лінійну нерівність, яка не буде містити параметра.

Приклад 7. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$(3a - 11)x^2 + (1 - a)x + 1 \leq 0$$

Розв'язання. Знайдемо вираз для дискримінанту

$$D(a) = (1 - a)^2 - 4(3a - 11) = a^2 - 14a + 45$$

та корені $x_1 = \frac{a-1-\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}$ і $x_2 = \frac{a-1+\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}$ квадратного рівняння $(3a - 11)x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$.

Розглянемо випадки, що призводять до різних ситуацій при пошуку розв'язку:

1) Якщо $(3a - 11) > 0$, тобто $a > 3\frac{2}{3}$, то гілки параболи будуть напрямлені вгору.

a. Нехай $D(a) > 0$, тобто $a^2 - 14a + 45 > 0$. Розв'язавши останню нерівність за допомогою методу інтервалів, отримаємо множину значень параметра $a \in (-\infty; 5) \cup (9; \infty)$. Поєднуючи цю множину з умовою $a > 3\frac{2}{3}$, остаточно отримаємо множину $a \in (3\frac{2}{3}; 5) \cup (9; \infty)$, що приводить до випадку 1) схематичного зображення параболи. В

цьому випадку множина розв'язків заданої нерівності буде мати вигляд: $x \in (x_1; x_2)$. Треба звернути увагу, на те, що в цьому випадку $x_1 < x_2$, оскільки чисельник x_1 завжди менше чисельника x_2, і при діленні обох частин нерівності на однакове додатне число нерівність не змінюється.

b. Нехай $D(a) = 0$, тобто $a = 5$ або $a = 9$. Обидва ці значення задовольняють умові $a > 3\frac{2}{3}$. Для кожного з цих значень отримаємо випадок 2) схематичного зображення параболи. В цьому випадку розв'язком нерівності буде єдине значення $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{a-1}{2(3a-11)}$. Підставивши в останній вираз знайдені значення параметра отримаємо, що при $a = 5$ $x = \frac{1}{2}$, а при $a = 9$ маємо $x = \frac{1}{4}$.

c. Нарешті, нехай $D(a) < 0$, тобто $a \in (5; 9)$. Всі значення параметра з цієї множини задовольняють умові $a > 3\frac{2}{3}$. Для таких значень ми отримаємо випадок 3) схематичного зображення параболи. Розв'язків в цьому випадку нерівність не має.

2) Якщо $(3a - 11) < 0$, тобто $a < 3\frac{2}{3}$, то гілки параболи будуть напрямлені вниз.

a. Нехай $D(a) > 0$, тобто $a \in (-\infty; 5) \cup (9; \infty)$. Поєднуючи цю множину з умовою $a < 3\frac{2}{3}$, остаточно отримаємо множину $a \in (-\infty; 3\frac{2}{3})$, що приводить до випадку 4) схематичного зображення параболи. В цьому випадку множина розв'язків заданої нерівності буде мати вигляд: $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; \infty)$. В цьому випадку $x_1 > x_2$, оскільки чисельник x_1 менше чисельника x_2, а при діленні лівої та правої частини нерівності на однакове від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний.

b. Нехай $D(a) = 0$, тобто $a = 5$ або $a = 9$. Ці значення не задовольняють умові $a < 3\frac{2}{3}$, тому не існує значень параметра, при яких буде можливе зображення параболи як у випадку 5).

c. Нехай $D(a) < 0$, тобто $a \in (5; 9)$. Знову ці значення не задовольняють умові $a < 3\frac{2}{3}$, тому випадок 6) для даної нерівності також є неможливим.

3) Якщо $(3a - 11) = 0$, тобто $a = 3\frac{2}{3}$, то задана нерівність перетвориться на лінійну нерівність виду $-\frac{8}{3}x + 1 \leq 0$, розв'язком якої є множина $x \in \left[\frac{3}{8}; \infty\right)$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 3\frac{2}{3})$, то

$$x \in \left(-\infty; \frac{a-1+\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}\right) \cup \left(\frac{a-1-\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}; \infty\right),$$

якщо $a = 3\frac{2}{3}$, то $x \in \left[\frac{3}{8}; \infty\right)$,

якщо $a \in (3\frac{2}{3}; 5) \cup (9; \infty)$, то

$$x \in \left(\frac{a-1-\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}; \frac{a-1+\sqrt{a^2-14a+45}}{2(3a-11)}\right),$$

якщо $a = 5$, то $x = \frac{1}{2}$,

якщо $a \in (5; 9)$, то немає розв'язків,

якщо $a = 9$, то $x = \frac{1}{4}$.

Приклад 8. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність виконується для всіх значень x

$$ax^2 + (3a - 1)x + 1 - a \geq 0$$

Розв'язання. Задача знову містить квадратну нерівність, але в цьому випадку розв'язувати її не треба. Треба лише знайти ті значення параметра, що приводять до одного чи декількох випадків схематичного зображення параболи. Інші випадки при цьому розглядати не треба.

Задана нерівність буде виконуватись для всіх значень x у випадках 2) та 3) схематичного зображення параболи. Для цього необхідне одночасне виконання двох умов, які утворюють наступну систему

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ D(a) \leq 0 \end{cases}$$

Знайдемо вираз для дискримінанту

$$D(a) = (3a-1)^2 - 4a(1-a) = 9a^2 - 6a + 1 - 4a + 4a^2$$
$$= 13a^2 - 10a + 1$$

Тоді система перетворюється на

$$\begin{cases} a > 0 \\ 13a^2 - 10a + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи останню квадратну нерівність за наведеною раніше схемою, отримаємо множину $a \in \left[\frac{5-2\sqrt{3}}{13}; \frac{5+2\sqrt{3}}{13}\right]$. Оскільки всі отримані значення задовольняють першу нерівність системи, то отримана множина є також і розв'язком системи.

Відповідь: $a \in \left[\frac{5-2\sqrt{3}}{13}; \frac{5+2\sqrt{3}}{13}\right]$.

Задачі для самостійної роботи.

7. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

7.1. $(5a-19)x^2 + (a-7)x - 1 \leq 0$

7.2. $(25a+3)x^2 + (20a+5)x + 4a + 1 < 0$

7.3. $(5a+1)x^2 + (a+5)x + 1 \geq 0$

7.4. $(9a+4)x^2 + (6a-4)x + (a-5) \leq 0$

7.5. $(7a+5)x^2 - (14a+3)x + 7a - 3 > 0$

7.6. $(3-2a)x^2 + (a+1)x + 1 < 0$

7.7. $(2a+9)x^2 + (a+3)x - 1 > 0$

7.8. $(a-3)x^2 + (a+3)x - 2 \geq 0$

7.9. $(2-3a)x^2 + (6a-1)x - (3a+5) \leq 0$

7.10. $(5a+4)x^2 + (a-1)x - 1 < 0$

7.11. $(a+9)x^2+(a+1)x+a+9>0$

7.12. $(2a+5)x^2-(8a+7)x+8a-1\leq 0$

7.13. $(7a+13)x^2+(a-5)x-1\geq 0$

7.14. $(a-3)x^2-2ax+a+1<0$

7.15. $(2a+1)x^2+(4a+2)x+2a-3>0$

7.16. $(4a-5)x^2+(a-5)x-1<0$

7.17. $(3a-10)x^2+(a-1)x-1\geq 0$

7.18. $(4-9a)x^2-(12a+7)x-4a-3\leq 0$

7.19. $(4a+2)x^2-(16a-3)x+16a>0$

7.20. $(a+2)x^2-(10a+1)x+25a-3<0$

8. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність виконується для всіх значень x

8.1. $(a+1)x^2+2ax-3a+2\leq 0$

8.2. $2ax^2-x+5a+1\leq 0$

8.3. $(3a+1)x^2+(a-1)x-2a+3\leq 0$

8.4. $(2-a)x^2+(a-2)x+a+4\leq 0$

8.5. $(a+3)x^2+(a-2)x+2a+3\leq 0$

8.6. $(2a-1)x^2+(2-a)x+a-4\leq 0$

8.7. $(a-3)x^2+ax+a-2\leq 0$

8.8. $(3-2a)x^2+(2a-1)x+2a\geq 0$

8.9. $(3-2a)x^2+(2a-1)x+2a\leq 0$

8.10. $(a+1)x^2+(2-a)x+a-3\leq 0$

8. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність не має розв’язків

8.11. $(a-1)x^2+(2-a)x+a+1\leq 0$

8.12. $(2a+3)x^2+4ax-a\leq 0$

8.13. $(1-2a)x^2-(a+2)x+3-a\leq 0$

8.14. $(3a+1)x^2-(a+2)x-(a+1)\leq 0$

8.15. $(a-4)x^2-(a+1)x+a-1\leq 0$

8.16. $(a+1)x^2+(2a+1)x+3a \leq 0$

8.17. $(a-4)x^2+3ax+a-2 \leq 0$

8.18. $(a+3)x^2-5x+2a-1 \leq 0$

8.19. $(2a+3)x^2+(a+2)x-a \leq 0$

8.20. $(a-4)x^2-ax+2a-1 \leq 0$

7.Застосування теореми Вієта до розв'язання задач з параметрами

Теорема Вієта: якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1 та x_2, то виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \qquad (8)$$

Зауваження 1: теорема Вієта не гарантує існування коренів, тому перед її застосуванням в задачах з параметрами треба забезпечити виконання умови $D \geq 0$.

Зауваження 2: теорема Вієта застосовується тільки до зведеного рівняння, тобто такого, в якому коефіцієнт при x^2 дорівнює 1. Якщо це не так, треба поділити на цей коефіцієнт ліву та праву частину рівняння, для тих значень параметра, для яких цей коефіцієнт не дорівнює нулю. Окремо розглянути задачу для тих значень параметра, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю.

Зауваження 3: у випадку, коли $D = 0$ будемо вважати, що рівняння має два рівні корені.

Теорема Вієта в задачах з параметрами використовується тоді, коли треба шукати значення параметра, при яких корені задовольняють деяким умовам. Хоча в цьому випадку можна було б знаходити корені і накладати на них додаткові умови, однак такий спосіб буде вимагати набагато більше зусиль.

Одна з тих умов на корені, при якій максимально зручно використовувати теорему Вієта, це умова на знаки коренів. Наведемо всі можливі випадки.

1) Обидва корені мають додатні знаки, якщо виконуються наступні умови

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} D \geq 0 \\ -p > 0 \\ q > 0 \end{cases}$$

2) Обидва корені мають від'ємні знаки, якщо виконуються наступні умови

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} D \geq 0 \\ -p < 0 \\ q > 0 \end{cases}$$

3) Корені мають різні знаки, якщо виконуються умови

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} D \geq 0 \\ p < 0 \end{cases}$$

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння додатні

$$(a-1)x^2 + (2a+3)x + 3a - 2 = 0$$

Розв'язання. Для того, щоб мати змогу застосувати теорему Вієта, треба розглянути переконатися, що рівняння є квадратним.

1) Нехай $a - 1 \neq 0$, тобто $a \neq 1$. В цьому випадку рівняння є квадратним, тому можна обчислити його дискримінант і зробити його зведеним.

$$D(a) = (2a+3)^2 - 4(a-1)(3a-2) = -8a^2 + 32a + 1$$

Зведене рівняння матиме вигляд

$$x^2 + \frac{2a+3}{a-1}x + \frac{3a-2}{a-1} = 0$$

Для того, щоб виконувалася умова задачі, потрібне виконання системи

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} a \neq 1 \\ -8a^2 + 32a + 1 \geq 0 \\ -\frac{2a+3}{a-1} > 0 \\ \frac{3a-2}{a-1} > 0 \end{cases}$$

Кожну нерівність системи будемо розв'язувати методом інтервалів і отримаємо наступну систему множин

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ a \in \left(\frac{8-\sqrt{66}}{4}; \frac{8+\sqrt{66}}{4}\right) \\ a \in \left(-\frac{3}{2}; 1\right) \\ a \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty) \end{cases}$$

Результатом перетину отриманих множин буде множина $a \in \left(\frac{8-\sqrt{66}}{4}; \frac{2}{3}\right)$.

2) Нехай $a-1=0$, тобто $a=1$. В цьому випадку задане рівняння перетвориться на рівняння $5x+1=0$, розв'язок якого $x=-\frac{1}{5}$ не є додатним, тому $a=1$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a \in \left(\frac{8-\sqrt{66}}{4}; \frac{2}{3}\right)$.

Розглянемо ще дві характерні задачі, в яких зручно застосовувати теорему Вієта.

Приклад 10.1. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+ax+a+2=0$$

дорівнює 4.

Розв'язання. Оскільки рівняння в даному випадку є зведеним, одразу можна застосовувати теорему Вієта. Крім того, за умовою ми знаємо, що $x_1^2+x_2^2=4$. Отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} D(a) \geq 0 \\ x_1+x_2=-a \\ x_1 \cdot x_2 = a+2 \\ x_1^2+x_2^2=4 \end{cases}$$

При розв'язанні системи важливим є те, що знаходити корені x_1 та x_2 не потрібно. З цієї системи треба знайти тільки значення параметра. Для цього слід перетворити останнє рівняння так, щоб в нього можна було підставити замість суми та добутку коренів відповідні значення, залежні від параметра. Перетворимо суму квадратів на квадрат суми

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

Тепер система перетвориться на

$$\begin{cases} a^2-4a-8 \geq 0 \\ x_1+x_2=-a \\ x_1 \cdot x_2 = a+2 \\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4 \end{cases}$$

Підставимо праві частини другого та третього рівняння в останнє і отримаємо наступну систему відносно параметра

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 8 \geq 0 \\ (-a)^2 - 2(a+2) = 4 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a^2 - 4a - 8 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Першу нерівність системи можна розв'язати методом інтервалів, але можна просто підставити отримані значення параметра в нерівність. Якщо отримана числова нерівність виявиться правильною, то таке значення параметра є розв'язком системи. В нашому випадку розв'язком системи є тільки значення $a = -2$.

Відповідь: $a = -2$.

Приклад 10.2. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 + (a-1)x + 2a^2 = 0$$

в два рази більше ніж інший.

Розв'язання. Оскільки рівняння в даному випадку є зведеним, одразу можна застосовувати теорему Вієта. Крім того, за умовою ми знаємо, що $x_1 = 2x_2$. Отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} D(a) \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -(a-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2a^2 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

Знову з цієї системи треба знайти тільки значення параметра, тому спочатку звільнимся від x_1 за допомогою останньої рівності, а потім виразимо x_2 з другої рівності. Отримаємо

$$\begin{cases} a^2 - 6a - 1 \geq 0 \\ 3x_2 = -(a-1) \\ 2x_2^2 = 2a^2 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a^2 - 6a - 1 \geq 0 \\ x_2 = \frac{1-a}{3} \\ 2\left(\frac{1-a}{3}\right)^2 = 2a^2 \end{cases} \text{звідки} \begin{cases} a^2 - 6a - 1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ a = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

З двох отриманих значень параметра тільки друге задовольняє нерівність системи, тому остаточнім розв'язком системи буде $a = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $a = -\frac{1}{2}$.

Задачі для самостійної роботи.

9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння додатні

9.1. $(a+3)x^2+ax-a-2=0$

9.2. $(a+2)x^2-(2a-1)x+a-4=0$

9.3. $(2a-3)x^2+2ax-1=0$

9.4. $(a^2-3a+2)x^2+(a-1)x-2=0$

9.5. $(a+1)x^2+(a+3)x+a+1=0$

9.6. $(a-3)x^2+(3a+1)x+a-3=0$

9.7. $(a-17)x^2+(3a+5)x+a-2=0$

9.8. $(a-2)x^2+(4a+2)x+a-2=0$

9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння мають різні знаки

9.9. $(a-3)x^2+2ax-a-2=0$

9.10. $x^2-2(a-1)x+a-3=0$

9.11. $(a-5)x^2+(a-5)x+1=0$

9.12. $-x^2+(a+5)x+a^2+a-4=0$

9.13. $(a-2)x^2+(3a+1)x+a-5=0$

9.14. $(a-1)x^2+(4a+3)x+a-13=0$

9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння від'ємні

9.15. $(a^2-1)x^2+2(a-2)x+1=0$

9.16. $(2a+3)x^2+4(a+4)x+2a-3=0$

9.17. $(a-3)x^2-4x-a-2=0$

9.18. $(a-1)x^2+3ax+5a=0$

9.19. $(a+3)x^2+(a+3)x+a=0$

9.20. $(a-2)x^2+(a+3)x+a-5=0$

10.1. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 - (2a - 1)x + a - 2 = 0$$

дорівнює 1.

10.2. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 + (3a - 1)x + 8(a + 4)^2 = 0$$

в два рази більше ніж інший.

10.3. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(a - 1)x^2 - 2ax - 4 = 0$$

дорівнює 4.

10.4. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 + (5 - 4a)x + 3(3a + 1)^2 = 0$$

в три рази більше ніж інший.

10.5. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 + (a + 3)x + 5a - 2 = 0$$

дорівнює 10.

10.6. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 + (3a - 7)x + (12a + 4)^2 = 0$$

в чотири рази більше ніж інший.

10.7. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(2 - a)x^2 - (3a - 2)x - 4 = 0$$

дорівнює 9.

10.8. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 + (7a + 9)x + 2(a - 5)^2 = 0$$

в два рази більше ніж інший.

10.9. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 - (3 - a)x - (4a + 3) = 0$$

дорівнює 12.

10.10. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$(a - 1)^2x^2 - (a - 1)x + 2(4a - 7)^2 = 0$$

в два рази більше ніж інший.

10.11. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 - (2a - 5)x + 2a^2 + 3 = 0$$

дорівнює 5.

10.12. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 - (11a - 8)x + 12(5a + 2)^2 = 0$$

в три рази більше ніж інший.

10.13. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(a - 4)x^2 - 3ax + 2a^2 + 5 = 0$$

дорівнює 9.

10.14. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 + (2a + 3)x + 18(4 - 3a)^2 = 0$$

в два рази більше ніж інший.

10.15. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2 + (11 - 7a)x + 4a - 3 = 0$$

дорівнює 14.

10.16. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2 - 2(a - 5)x + 3(7a - 4)^2 = 0$$

в три рази більше ніж інший.

10.17. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$(2a-5)x^2-2(a-3)x+10=0$$

дорівнює 1.

10.18. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2+(3-11a)x+4(a+9)^2=0$$

в чотири рази більше ніж інший.

10.19. Знайти всі значення параметра a, при яких сума квадратів коренів рівняння

$$x^2+(4a-7)x+2-5a=0$$

дорівнює 15.

10.20. Знайти всі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння

$$x^2-(5a+8)x+2(2a-9)^2=0$$

в два рази більше ніж інший.

8. Застосування властивостей квадратного тричлена до розв'язання задач з параметрами

В даному розділі будемо розглядати задачі, в яких треба знайти всі значення параметра, при яких розв'язки x_1, x_2 квадратного рівняння

$$m(a)x^2 + n(a)x + p(a) = 0$$

задовольняють деяку умову. Серед найбільш поширених умов, яким можуть задовольняти корені, наведемо наступні:

а) $x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b)$

б) $x_1 > a, x_2 > a$

в) $x_1 < a, x_2 < a$

г) $x_1 < a, x_2 > a.$

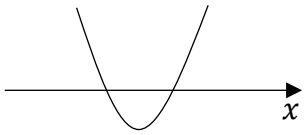
Особливість задач даного виду в тому, що для пошуку необхідних значень параметра **не треба знаходити розв'язки квадратного рівняння**. В цьому випадку використовується **графічний метод**, що заснований на тому, що кожна парабола має проміжок зростання та спадання, кожний з яких містить рівно один корінь рівняння (у випадку існування двох різних коренів). Наведемо етапи застосування графічного методу:

1) Розглянемо випадок $m(a) = 0$. Для кожного зі значень параметра, що задовольняє цю умову, знайдемо розв'язок рівняння. Якщо цей розв'язок задовольняє умові задачі, то відповідне значення параметра є частиною відповіді.
2) Для випадку $m(a) \neq 0$ визначимо функцію

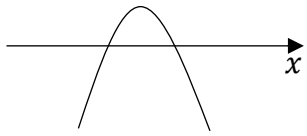
$$f(x) = m(a)x^2 + n(a)x + p(a),$$

що задається лівою частиною рівняння.

3) Схематично зобразимо графік параболи $y = f(x)$, що має корені



якщо $m(a) > 0$ або

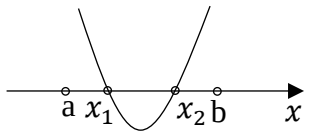


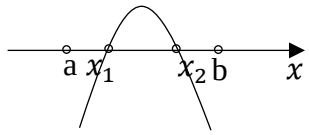
якщо $m(a) < 0$

4) На осі Ox треба зобразити корені рівняння x_1, x_2 (точки перетину графіку параболи $y = f(x)$ з віссю Ox) та кінці інтервалу (a, b) або

значення a, з яким порівнюються корені з урахуванням їх взаємного розташування відповідно до умови задачі

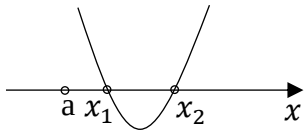
а) якщо $x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b)$, то

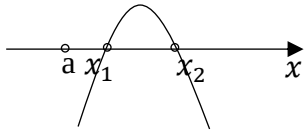




якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

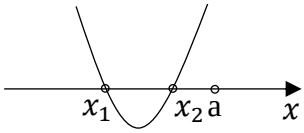
б) якщо $x_1 > a, x_2 > a$, то

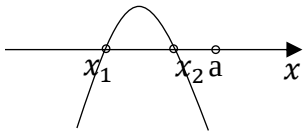




якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

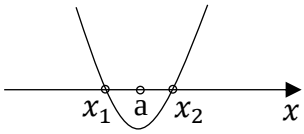
в) якщо $x_1 < a, x_2 < a$, то

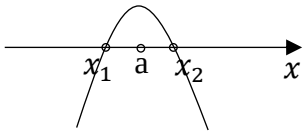




якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

г) якщо $x_1 < a, x_2 > a$, то





якщо $m(a) > 0$ або якщо $m(a) < 0$

5) Треба скласти систему умов, яким повинні задовольняти параметри параболи

$$f(x) = m(a)x^2 + n(a)x + p(a),$$

щоб вона відповідала побудованому схематичному зображенню. Далі будуть наведені всі можливі типи умов, що утворюють таку систему.

а) Умова на напрям гілок параболи. Якщо коефіцієнт $m(a)$ залежить від параметра і може змінювати знак, то парабола схематично може бути зображена з гілками вгору або вниз. Для

кожного з цих зображень треба складати свою систему умов, і у відповідь брати сукупність розв'язків кожної системи. Перша з цих умов буде $m(a) > 0$, якщо гілки параболи напрямлені вгору або $m(a) < 0$, якщо гілки параболи напрямлені вниз.

б) Умови на знак функції в кінцях інтервалу (a, b) або в точці значення a, з якою порівнюються корені. Відповідно до схематичного зображення визначаємо знак виразів $f(a)$ та $f(b)$. Якщо точка на параболі, що відповідає значенню аргумента a або b лежить вище осі Ox, то відповідне значення $f(a)$ та $f(b)$ є додатнім, і навпаки, якщо точка на параболі, що відповідає значенню аргумента a або b лежить нижче осі Ox, то відповідне значення $f(a)$ та $f(b)$ є від'ємним.

в) Умова на наявність коренів: $D(a) > 0$, де

$$D(a) = n^2(a) - 4m(a) \cdot p(a).$$

г) Умова на розміщення вершини параболи. Цей пункт є необхідним лише у випадках умов на корені пунктів а),б) та в), коли корені задовольняють умову одного типу, що призводить до того, що абсциса вершини параболи також задовольняє відповідну умову, оскільки знаходиться між коренями. Абсциса вершини параболи знаходиться за формулою $x_{\text{в}} = -\frac{n(a)}{2m(a)}$, отже вираз $-\frac{n(a)}{2m(a)}$ повинен задовольняти ту ж саму умову, що і корені.

6) Розв'язуємо систему нерівностей, що складається з усіх умов пункту 5). Розв'язок системи або сукупності відповідних систем і буде відповіддю задачі.

Зауваження 1: при схематичній побудові параболи $y = f(x)$ на координатній площині Oxy вісь Oy не зображується, оскільки немає необхідності слідкувати за знаками аргументів функції $y = f(x)$, але наявність

осі Oy мається на увазі, тобто ордината всіх точок графіку, що лежать вище осі Ox є додатною, а нижче – від'ємною.

Зауваження 2: при складанні системи в пункті 5) не обов'язково використовувати всі типи умов. Для деяких схематичних зображень умов може бути менше, оскільки деякі з них виконуватимуться автоматично.

Зауваження 3: умова $D(a) > 0$ може бути замінена на умову $D(a) \geq 0$, якщо в умові задачі на сказано, що корені є різними, та якщо корені задовольняють умову одного типу.

Зауваження 4: при виконанні системи умов

$$\begin{cases} m(a) > 0 \\ f(\tilde{x}) < 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} m(a) < 0 \\ f(\tilde{x}) > 0 \end{cases}$$

де $\tilde{x}$ – довільне значення аргументу, рівняння $m(a)x^2 + n(a)x + p(a) = 0$ має корені, тому умова $D(a) > 0$ виконується автоматично і вимагати виконання цієї умови окремо немає потреби.

Зауваження 5: знехтувати умовою г) на розміщення вершини параболи у випадку, коли корені рівняння задовольняють умову одного типу не можна, оскільки обмеження пунктів а)-в) є однаковими для всіх типів умов а), б) та в), тому не дають змогу обрати один з цих випадків, але обмеження пункту г) буде різним для кожного випадку.

Приклад 11.1. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

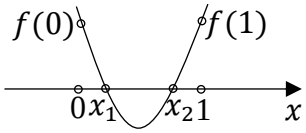
$$(a-1)x^2 + (a-2)x + a + 3 = 0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

Розв'язання. 1) Розглянемо випадок, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю: $a - 1 = 0$. Підставимо в рівняння $a = 1$ і отримаємо розв'язок $x = 4$, що не належить проміжку $(0; 1)$. Отже значення параметра $a = 1$ не входить до множини розв'язків.

2) При $a \neq 1$ означимо функцію $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x + a + 3$. Оскільки коефіцієнт при x^2 може змінювати знак при різних значеннях параметра, то розглянемо два випадки.

а) Гілки параболи напрямлені вгору, тоді схематичний графік функції $y = f(x)$ з урахуванням умови на корені має наступний вигляд



Система умов, що описує необхідне зображення параболи має вигляд

$$\begin{cases} a - 1 > 0, \text{умова на напрям гілок параболи} \\ f(0) > 0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ f(1) > 0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ D(a) \geq 0, \text{умова на наявність коренів} \\ 0 < x_{\text{в}} < 1, \text{умова на розміщення вершини параболи} \end{cases}$$

Підставимо замість кожної з умов відповідні вирази, залежні від параметра

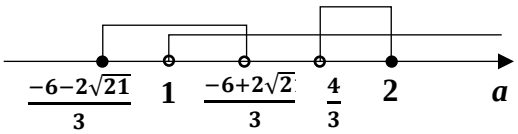
$$\begin{cases} a - 1 > 0 \\ a + 3 > 0 \\ 3a > 0 \\ -3a^2 - 12a + 16 \geq 0 \\ 0 < -\dfrac{(a-2)}{2(a-1)} < 1 \end{cases}$$

Розв'язок системи перших трьох нерівностей системи дає множину $a \in (1; \infty)$. Четверта нерівність має розв'язок $a \in \left[\frac{-6-2\sqrt{21}}{3}; \frac{-6+2\sqrt{21}}{3}\right]$. Остання подвійна нерівність зводиться до системи

$$\begin{cases} -\frac{a-2}{2(a-1)} > 0 \\ -\frac{a-2}{2(a-1)} < 1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} \frac{a-2}{a-1} < 0 \\ \frac{3a-4}{a-1} > 0 \end{cases}$$

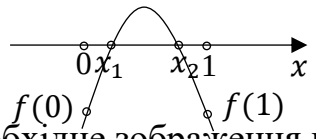
Розв'язуючи кожну нерівність методом інтервалів, отримаємо відповідно дві множини $a \in (1; 2)$ та $a \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$, звідки остаточний розв'язок подвійної нерівності матиме вигляд $a \in \left(\frac{4}{3}; 2\right)$.

Залишилось знайти спільну частину для трьох отриманих множин. Зобразимо їх на числовій прямій.



Оскільки зображені множини не мають спільної частини, то не існує значень параметра, які задовольняють отриману систему.

б) Гілки параболи направлені вниз, тоді схематичний графік функції $y = f(x)$ з урахуванням умови на корені має наступний вигляд



Система умов, що описує необхідне зображення параболи має вигляд

$$\begin{cases} a - 1 < 0, \text{умова на напрям гілок параболи} \\ f(0) < 0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ f(1) < 0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ D(a) \geq 0, \text{умова на наявність коренів} \\ 0 < x_{\text{в}} < 1, \text{умова на розміщення вершини параболи} \end{cases}$$

Підставимо замість кожної з умов відповідні вирази, залежні від параметра

$$\begin{cases} a - 1 < 0 \\ a + 3 < 0 \\ 3a < 0 \\ -3a^2 - 12a + 16 \geq 0 \\ 0 < -\dfrac{(a-2)}{2(a-1)} < 1 \end{cases}$$

Розв'язок системи перших трьох нерівностей системи дає множину $a \in (-\infty; -3)$. Четверта та п'ята нерівності не змінилися порівняно з попереднім випадком, тому дають ту ж саму множину розв'язків. Очевидно, що отримана система не має розв'язків, оскільки множини $a \in (-\infty; -3)$ та $a \in \left(\frac{4}{3}; 2\right)$ не мають спільної частини.

Відповідь: немає розв'язків.

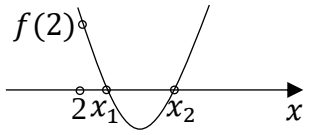
Приклад 11.2. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$a^2x^2 + (2a - 1)x + 3 = 0$$

більше 2.

Розв'язання. 1) Розглянемо випадок, коли коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю: $a^2 = 0$. Підставимо в рівняння $a = 0$ і отримаємо розв'язок $x = 3$, що задовольняє умову задачі. Отже значення параметра $a = 0$ входить до множини розв'язків.

2) При $a \neq 0$ означимо функцію $f(x) = a^2x^2 + (2a-1)x + 3$. Оскільки коефіцієнт при x^2 не може змінювати знак при різних значеннях параметра, то маємо єдиний випадок схематичного зображення функції $y = f(x)$.



Система умов, що описує необхідне зображення параболи має вигляд

$$\begin{cases} f(2) > 0, \text{умова на знак функції в кінцях інтервалу} \\ D(a) \geq 0, \text{умова на наявність коренів} \\ x_{\text{в}} > 2, \text{умова на розміщення вершини параболи} \end{cases}$$

Підставимо замість кожної з умов відповідні вирази, залежні від параметра

$$\begin{cases} 4a^2 + 4a + 1 > 0 \\ -8a^2 - 4a + 1 \geq 0 \\ -\frac{2a-1}{2a^2} > 2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} (2a+1)^2 > 0 \\ -8a^2 - 4a + 1 \geq 0 \\ \frac{4a^2+2a-1}{a^2} < 0 \end{cases}$$

Розв'язавши окремо кожну нерівність, отримаємо систему множин відповідних розв'язків

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right) \\ a \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{4}; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right] \\ a \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \end{cases}$$

Множина, що є розв'язком останньої системи має вигляд $a \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right]$. Додавши до отриманої множини значення $a = 0$, отримане раніше, маємо остаточну відповідь.

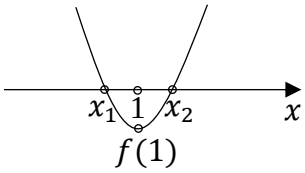
Відповідь: $a \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right]$.

Приклад 11.3. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$x^2 + (a+5)x - 4 = 0$$

менше 1, а інший більше 1.

Розв'язання. Означимо функцію $f(x) = x^2 + (a+5)x - 4$. Це парабола, гілки якої напрямлені вгору.



При складанні системи умов, що описує отримане зображення параболи, умову на гілки параболи накладати не треба, умова на знак функції в кінцях інтервалу матиме вигляд $f(1) < 0$, умову на наявність коренів можна не накладати (дивись зауваження 4), умова на вершину параболи також не потрібна (корені задовольняють умови різного типу). Отже, в даному випадку система умов перетворюється на одну нерівність

$$f(1) < 0 \text{ або } a < -2.$$

Відповідь: $a < -2$.

Задачі для самостійної роботи.

11.1. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$(a-2)x^2 + 2(3a+7)x - 5a = 0$$

менше 2, а інший більше 2.

11.2. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$x^2 + (a-2)x + a + 3 = 0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

11.3. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$a^2x^2 + (2a-1)x + 3 = 0$$

більше 2.

11.4. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$x^2 - (2a-13)x + 4a - 6 = 0$$

менше -1, а інший більше 0.

11.5.Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(a-1)x^2 + (a-2)x + a + 3 = 0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

11.6. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(3a-1)x^2+(a-3)x-(a+2)=0$$

менше 4.

11.7. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$(3-2a)x^2-(11a+4)x+3a-2=0$$

менше 3, а інший більше 3.

11.8. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

11.9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(3-2a)x^2-(3a-7)x+4-a=0$$

більше -2.

11.10. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$x^2+(5a-6)x-7+4a=0$$

менше -2, а інший більше 2.

11.11. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

11.12. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(5a-4)x^2+2(5a-1)x+2a-2=0$$

більше 1.

11.13. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$x^2-2(a+4)x+5a+2=0$$

менше 1, а інший більше 3.

11.14. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$

належать проміжку $(0; 1)$.

11.15. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(1-a)x^2-8ax+6-2a=0$$

менше 3.

11.16. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$(a-4)x^2+(8a-5)x-3a-7=0$$

менше -2, а інший більше -2.

11.17. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$

належать проміжку $(0;1)$.

11.18. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$x^2+2(a+4)x+a+4=0$$

більше -3.

11.19. Знайти всі значення параметра a, при яких один корінь рівняння

$$(5-a)x^2-5(2a-7)x+a-2=0$$

менше 1, а інший більше 1.

11.20. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння

$$(a-1)x^2+(a-2)x+a+3=0$$

належать проміжку $(0;1)$.

9. Рівняння, що містять знак модуля

Розглянемо рівняння виду

$$|f(x)| = g(x).$$

При розв'язанні рівняння такого виду треба перейти до еквівалентної сукупності двох систем. Існує два способи це зробити.

Спосіб 1:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Спосіб 2:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

При виборі способу розв'язання конкретного рівняння треба звертати увагу на те, яку з нерівностей легше розв'язувати: $f(x) \geq 0$ або $g(x) \geq 0$.

Приклад 12. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$|x + a| = ax + 4$$

Розв'язання. Скористаємось способом 1 переходу до еквівалентної сукупності систем, але для зручності запису будемо розглядати кожну систему як окремий випадок, а до відповіді включимо об'єднання отриманих в кожному випадку множин.

1) Перша система матиме наступний вигляд

$$\begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + a = ax + 4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x + a \geq 0 \\ (a-1)x = a - 4 \end{cases}$$

Друге рівняння системи при $a = 1$ не має розв'язків, а при $a \neq 1$ маємо $x = \frac{a-4}{a-1}$. Тоді перша нерівність системи при підстановці замість змінної виразу, залежного від параметра, дає наступну умову на параметр

$$\frac{a-4}{a-1} + a \geq 0 \text{ або } \frac{(a-2)(a+2)}{a-1} \geq 0$$

звідки методом інтервалів $a \in [-2; 1) \cup [2; \infty)$. Отже при $a \in [-2; 1) \cup [2; \infty)$ маємо розв'язок $x = \frac{a-4}{a-1}$. При інших значеннях параметра перший випадок не дає розв'язку.

2) Друга система матиме наступний вигляд

$$\begin{cases} x + a < 0 \\ -x - a = ax + 4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x + a < 0 \\ (a+1)x = -a - 4 \end{cases}$$

Друге рівняння системи при $a = -1$ не має розв'язків, а при $a \neq -1$ маємо $x = \frac{-a-4}{a+1}$. Тоді перша нерівність системи при підстановці замість змінної виразу, залежного від параметра, дає наступну умову на параметр

$$\frac{-a-4}{a+1} + a < 0 \text{ або } \frac{(a-2)(a+2)}{a+1} < 0$$

звідки по методу інтервалів $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$. Отже при $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$ маємо розв'язок $x = \frac{-a-4}{a+1}$. При інших значеннях параметра другий випадок не дає розв'язку.

Поєднуючи результати обох випадків, при різних значеннях параметра отримаємо три можливості: маємо лише перший корінь, маємо лише другий корінь та маємо обидва корені одночасно.

Відповідь: якщо $a \in [-2; -1] \cup [2; \infty)$, то $x = \frac{a-4}{a-1}$,

якщо $a \in (-\infty; -2) \cup [1; 2)$, то $x = \frac{-a-4}{a+1}$,

якщо $a \in (-1; 1)$, то $\left[\begin{array}{l} x = \frac{a-4}{a-1} \\ x = \frac{-a-4}{a+1} \end{array}\right.$.

Розглянемо рівняння, в якому наявні декілька виразів під знаком модуля. В цьому випадку використовують метод інтервалів, що дозволяє швидко визначити умови, за яких знак кожного виразу під знаком модуля є сталим і відомим.

Приклад 13. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$|x - 1| + |x - a| = x$$

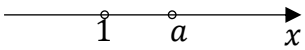
Розв'язання. Вирази під знаками модуля змінюють знак при $x = 1$ та $x = a$, розглянемо три можливих випадки співвідношення цих значень.

1) $a = 1$. Підставимо відповідне значення параметра і отримаємо рівняння

$$2|x - 1| = x,$$

розв'язками якого будуть $x = 2$ та $x = \frac{2}{3}$.

2) $a > 1$. В цьому випадку, розміщуючи значення $x = 1$ та $x = a$ на числовій прямій, отримаємо наступне зображення



Таким чином числова пряма виявляється розбитою на три множини: $(-\infty; 1)$, $(1; a)$ та $(a; \infty)$, на кожній з яких обидва модулі рівняння мають фіксований знак. Наведемо таблицю, в який вказані відповідні знаки.

	$(-\infty; 1)$	$(1; a)$	$(a; \infty)$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - a$	$-$	$-$	$+$

Отже, для того, щоб розкрити модулі в рівнянні, треба розглянути три випадки.

а) $x \in (-\infty; 1)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$-(x - 1) - (x - a) = x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a > 1 \\ x < 1 \\ -2x + a + 1 = x \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a > 1 \\ x < 1 \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a > 1 \\ \frac{a+1}{3} < 1 \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a > 1 \\ a < 2 \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Тобто при $a \in (1; 2)$ маємо розв'язок $x = \frac{a+1}{3}$.

б) $x \in [1; a)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$(x-1)-(x-a)=x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a > 1 \\ 1 \le x < a \\ x = a-1 \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a > 1 \\ 1 \le a-1 < a \\ x = a-1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a \ge 2 \\ x = a-1 \end{cases}$$

Тобто при $a \in [2; \infty)$ маємо розв'язок $x = a-1$.

в) $x \in [a; \infty)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$(x-1)+(x-a)=x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a > 1 \\ x \ge a \\ 2x-a-1 = x \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a > 1 \\ x \ge a \\ x = a+1 \end{cases}$$

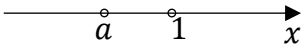
Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a > 1 \\ a+1 \ge a \\ x = a+1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a > 1 \\ x = a+1 \end{cases}$$

Тобто при $a \in (1; \infty)$ маємо розв'язок $x = a+1$.

Зауважимо, що при формуванні відповіді з отриманих результатів для кожного значення параметра треба буде вказати всі отримані значення змінної. Так, при $a \in (1; 2)$ з пункту а) отримано розв'язок $x = \frac{a+1}{3}$, але в пункті в) серед всіх можливих значень параметра також присутня множина $(1; 2)$, але в цьому випадку розв'язок має інший вигляд $x = a+1$. Отже, для таких значень параметра рівняння має два розв'язки. Аналогічна ситуація можлива і для інших значень параметра.

3) $a < 1$. В цьому випадку, розміщуючи значення $x = 1$ та $x = a$ на числовій прямій, отримаємо наступне зображення



Таким чином числова пряма виявляється розбитою на три множини: $(-\infty; a)$, $(a; 1)$ та $(1; \infty)$, на кожній з яких обидва модулі рівняння мають фіксований знак. Наведемо таблицю, в який вказані відповідні знаки.

	$(-\infty; a)$	$(a; 1)$	$(1; \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x - a$	$-$	$+$	$+$

Отже, для того, щоб розкрити модулі в рівнянні, треба розглянути три випадки.

а) $x \in (-\infty; a)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$-(x - 1) - (x - a) = x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a < 1 \\ x < a \\ -2x + a + 1 = x \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a < 1 \\ x < a \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a < 1 \\ \frac{a+1}{3} < a \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a < 1 \\ a > \frac{1}{2} \\ x = \frac{a+1}{3} \end{cases}$$

Тобто при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ маємо розв'язок $x = \frac{a+1}{3}$.

б) $x \in [a; 1)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$-(x - 1) + (x - a) = x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a < 1 \\ a \le x < 1 \\ x = 1 - a \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a < 1 \\ a \le 1 - a < 1 \\ x = 1 - a \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a < 1 \\ 0 < a \le \frac{1}{2} \\ x = 1 - a \end{cases}$$

Тобто при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ маємо розв'язок $x = 1 - a$.

в) $x \in [1; \infty)$. В цьому випадку рівняння перетворюється на

$$(x - 1) + (x - a) = x.$$

Тому, з урахуванням умов, отримаємо систему

$$\begin{cases} a < 1 \\ x \ge 1 \\ 2x - a - 1 = x \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a < 1 \\ x \ge 1 \\ x = a + 1 \end{cases}$$

Підставляючи отриманий вираз для змінної в другу умову, остаточно отримаємо

$$\begin{cases} a < 1 \\ a + 1 \ge 1 \\ x = a + 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a < 1 \\ a \ge 0 \\ x = a + 1 \end{cases}$$

Тобто при $a \in [0; 1)$ маємо розв'язок $x = a + 1$.

Поєднуючи всі отримані результати, маємо:

1) якщо $a = 1$, то $x = 2$ та $x = \frac{2}{3}$,

2) якщо $a \in (1; 2)$, то $x = \frac{a+1}{3}$ та $x = a + 1$,

3) якщо $a \in [2; \infty)$, то $x = a - 1$ та $x = a + 1$,

4) якщо $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, то $x = \frac{a+1}{3}$ та $x = a + 1$,

5) якщо $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, то $x = 1 - a$ та $x = a + 1$,

6) якщо $a = 0$, то $x = 1$.

Зауважимо, що випадки 2) та 4) дають однакові розв'язки, отже у відповідь ці множини значень параметрів можна об'єднати. Більш того, якщо в вирази для розв'язків підставити значення $a = 1$, то отримаємо розв'язки з пункту 1), отже значення $a = 1$ також можна приєднати до цього випадку. Також значення $a = 0$ можна приєднати до випадку 5).

Також зауважимо, що жоден з випадків не містить значення параметра з множини $(-\infty; 0)$, отже, для цих значень рівняння розв'язків не має. Цей випадок також треба додати до загальної відповіді.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, то $x = 1 - a$ та $x = a + 1$,

якщо $a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$, то $x = \frac{a+1}{3}$ та $x = a + 1$,

якщо $a \in [2; \infty)$, то $x = a - 1$ та $x = a + 1$.

Задачі для самостійної роботи.

12. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

12.1. $|x - 3a| = ax + 1$

12.2. $|x - a| - 1 = a$

12.3. $3x + |x - a| = 7$

12.4. $|x + a| - 9 = x - a$

12.5. $2x + |x + a| = a$

12.6. $|a - 3x| - 3x = 1 - a$

12.7. $|x - a| = 4a - x$

12.8. $|x - a| - 4 = x - a$

12.9. $|x + a - 1| = a + x - 3$

12.10. $|x + 2a| = x - a + 3$

12.11. $|5x + a| - ax = 2$

12.12. $|3x + a| = 11a - x$

12.13. $|x - a| = x + 4a$

12.14. $|x + a| = 2ax - 1$

12.15. $|x - 2a| = 5ax$

12.16. $3|x - a| + (a - 1)x + 2 = 0$

12.17. $8|x + a| - x + 1 = ax$

12.18. $|a - 3x| = 2ax + 1$

12.19. $4|x - a| = x + a$

12.20. $a(x + 1) = |x - 3a|$

13. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

13.1. $|x| + |x - 2a| = 3x - 4$

13.2. $5|x - 3| = 9 + 2|x - a|$

13.3. $|4x - a| + |x| = -2x$

13.4. $|x + a| + |4x - 1| = 3$

13.5. $|2x + 5| - |x - a| = 4$

13.6. $|x + 2| + |x - a| = 6x$

13.7. $|4x + 2| - |x - a| = 1$

13.8. $|2x - 1| + |x - a| = 1$

13.9. $|x + 2| - |x - a| = x$

13.10. $|x - 2a| + |x - 4| = a + 6$

13.11. $|2a - x| = |x + 3| + a$

13.12. $|x + a| + 2|x - 1| = x$

13.13. $|2x - 1| - |x - a| = 2$

13.14. $|2x + 3| + |x + a| = a$

13.15. $|x-a|-|2x+3|=10x$

13.16. $|x-5|+|x-a|=5a$

13.17. $|x-3|-|x+2a|=4$

13.18. $|x|+|x+a+1|=2x$

13.19. $|x-2|+|x-a|=5a-10$

13.20. $2|x-a|+2|x+1|=x$.

10. Ірраціональні рівняння

Будемо розглядати рівняння виду

$$\sqrt{f(x)} = g(x).$$

Для того, щоб звільнитися від ірраціональності, перейдемо до еквівалентної системи

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Зауваження. Вихідне рівняння має обмеження на допустимі значення змінної, тому може виникнути потреба розглянути умову $f(x) \geq 0$, але виконання цієї умови є наслідком з другого рівняння системи, тому окремо розглядати цю умову не треба.

Приклад 14. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\sqrt{x + a} = x - 1$$

Розв'язання. Перейдемо до еквівалентної системи

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + a = (x - 1)^2 \end{cases}$$

Після спрощення рівняння системи матиме вигляд

$$x^2 - 3x + 1 - a = 0.$$

Дискримінант рівняння має вигляд $D(a) = 4a + 5$, отже, при $a \geq -\frac{5}{4}$ рівняння має розв'язки $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{4a+5}}{2}$. Далі кожен з отриманих розв'язків підставимо в нерівність системи, для того, щоб отримати додаткові обмеження на параметр в кожному випадку окремо.

1) Якщо $x = \frac{3+\sqrt{4a+5}}{2}$, то нерівність системи перетворюється на $\frac{3+\sqrt{4a+5}}{2} - 1 \geq 0$ або $\sqrt{4a + 5} \geq -1$, що виконується для всіх значень параметра, що задовольняють умову $a \geq -\frac{5}{4}$.

2) Якщо $x = \frac{3-\sqrt{4a+5}}{2}$, то нерівність системи перетворюється на $\frac{3-\sqrt{4a+5}}{2} - 1 \geq 0$ або $\sqrt{4a+5} \leq 1$, розв'язком якої є множина $a \in \left[-\frac{5}{4}; 1\right]$.

При формуванні загальної відповіді для кожного значення параметра поєднаємо в один випадок всі отримані результати. Якщо деякі значення параметра не є допустимими в жодному з випадків, то у відповіді треба зазначити, що при цих значеннях розв'язку немає.

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right]$, то $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{4a+5}}{2}$,

якщо $a \in (-1; \infty)$, то $x = \frac{3+\sqrt{4a+5}}{2}$.

Задачі для самостійної роботи.

14. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

14.1. $\sqrt{2x-a} = 3 - x$

14.2. $\sqrt{5-x} = 3x - 2a$

14.3. $\sqrt{3x+2a} = 2x + 3$

14.4. $\sqrt{x-4a} = 2x - 1$

14.5. $\sqrt{7-2x} = 2a - 3x$

14.6. $\sqrt{x+6a} = 4x + 5$

14.7. $\sqrt{6-5x} = 5x - 4a$

14.8. $\sqrt{x+9a} = x + 4$

14.9. $\sqrt{3x+8a} = 2x - 4$

14.10. $\sqrt{x-8} = 3a - 5x$

14.11. $\sqrt{4a-3x} = 2x + 6$

14.12. $\sqrt{7x+1} = x + 2a$

14.13. $\sqrt{5x-a} = 2x - 6$

14.14. $\sqrt{x+8a} = 10 - 3x$

14.15. $\sqrt{12-5x} = 3x + a$

14.16. $\sqrt{4x+5a} = 3x + 5$

14.17. $\sqrt{x+3} = x - 2a$

14.18. $\sqrt{9x-7a} = 4x + 3$

14.19. $\sqrt{6-8x} = 6a + 4x$

14.20. $\sqrt{x+2a} = x - 7$

11. Ірраціональні нерівності

Будемо розглядати нерівності виду

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \text{ або } \sqrt{f(x)} \leq g(x)$$

або до відповідних строгих нерівностей.

Кожна з цих нерівностей може бути зведена до еквівалентної системи або сукупності двох систем. Так, для нерівності

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

еквівалентною буде наступна сукупність

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Якщо ж вихідна нерівність була строгою $\sqrt{f(x)} > g(x)$, то у відповідній сукупності строгою стане тільки нерівність $f(x) > g^2(x)$, інші умови залишаться незмінними.

У випадку нерівності

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$$

еквівалентна система матиме вигляд

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

Якщо нерівність є строгою $\sqrt{f(x)} < g(x)$, то в системі треба змінити останню нерівність на $f(x) < g^2(x)$.

Приклад 15. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$\sqrt{x+1} \geq x - a$$

Розв'язання. Перейдемо до еквівалентної сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a \geq 0 \\ x + 1 \geq (x-a)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - a < 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Розглянемо спочатку першу систему, яка після спрощення перетвориться на

$$\begin{cases} x \geq a \\ x^2 - (2a+1)x + a^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо другу нерівність системи. Дискримінант квадратного тричлена після спрощення має вигляд $D(a) = 4a + 5$. Коли $D(a) < 0$ друга нерівність, а отже і сама система, розв'язків не мають. Тому розглянемо два випадки.

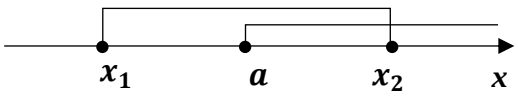
1) $D(a) = 0$, звідки $a = -\frac{5}{4}$. В цьому випадку друга нерівність дає єдиний розв'язок $x = a + \frac{1}{2}$, або, якщо підставити значення параметра, то $x = -\frac{3}{4}$. Якщо отримані значення параметра і змінної підставити в першу нерівність, то отримаємо правильну числову нерівність $-\frac{3}{4} \geq -\frac{5}{4}$, отже отриманий розв'язок є розв'язком системи.

2) $D(a) > 0$, звідки $a > -\frac{5}{4}$. В цьому випадку друга нерівність дає множину розв'язків $x \in [x_1; x_2]$, де $x_1 = \frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2}$ та $x_2 = \frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2}$.

Для того, щоб знайти множину розв'язків системи, треба визначити, як розмістити на числовій прямій вирази a та x_1 і x_2. Очевидно, що $x_2 > a$ при будь-якому значенні параметра, оскільки вираз в чисельнику більший за $2a$, а після ділення на 2 дріб виявляється більшим за a.

Залишилось порівняти вирази a та x_1. Розглянемо два випадки.

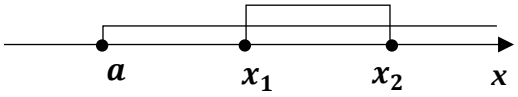
а) Нехай $x_1 < a$, тобто $\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2} < a$. Після спрощення остання нерівність перетворюється на $\sqrt{4a+5} > 1$, звідки $a > -1$. Всі отримані значення задовольняють попередню умову на параметр $a > -\frac{5}{4}$, а отже при $a > -1$ маємо наступне зображення множин, що є роз'вязками нерівностей системи



Отже, множина розв'язків першої системи при $a > -1$ має вид $x \in [a; x_2]$.

б) Нехай $x_1 \geq a$, тобто $\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2} \geq a$. Цей випадок для більшої наочності можна було б розбити на два випадки $x_1 > a$ та $x_1 = a$. Але, щоб зменшити кількість випадків, цього можна не робити, оскільки множина розв'язків у випадку $x_1 = a$ може бути отримана з множини розв'язків загального випадку $x_1 \geq a$.

Множина значень параметра, що задовольняє умову $\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2} \geq a$ має вигляд $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right]$, а зображення множини розв'язків нерівностей системи на числовій прямій має наступний вигляд



Отже, множина розв'язків першої системи при $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right]$ має вид $x \in [x_1; x_2]$.

Розглянемо другу систему, яка після спрощення перетвориться на

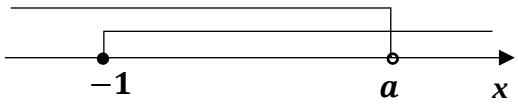
$$\begin{cases} x < a \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Знову, для того, щоб знайти множину розв'язків системи, треба розглянути два випадки.

1) $a \leq -1$, тоді зображення множини розв'язків нерівностей має вигляд

На рисунку видно, що множини розв'язків нерівностей не мають спільної частини, тому система в цьому випадку розв'язків немає.

2) $a > -1$, тоді зображення множини розв'язків нерівностей має вигляд



Отже, при $a > -1$ друга система має розв'язок $x \in [-1; a)$. Зауважимо, що при тих самих значеннях параметра перша система теж мала розв'язки, а оскільки ми розглядаємо сукупність, то у відповіді треба об'єднати отримані множини.

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$, то розв'язків немає,

якщо $a = -\frac{5}{4}$, то $x = -\frac{3}{4}$,

якщо $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right]$, то $x \in \left[\frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2}; \frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2}\right]$,

якщо $a \in (-1; \infty)$, то $x \in \left[-1; \frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2}\right]$.

Задачі для самостійної роботи.

15. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

15.1. $\sqrt{x-2a} \geq 3-x$

15.2. $\sqrt{7-x} \geq 4x+5a$

15.3. $\sqrt{5x+8a} > x+3$

15.4. $\sqrt{x+5a} > 2x-a$

15.5. $\sqrt{4x+11} \geq 5x+2a$

15.6. $\sqrt{9a-2x} > 6-7x$

15.7. $\sqrt{5x-11} \geq 3x+1$

15.8. $\sqrt{3x-a} > x-4$

15.9. $\sqrt{6x-2} \geq 4x+3$

15.10. $\sqrt{a-8x} \geq 7x-5$

15.11. $\sqrt{2x+7a} > 2x-1$

15.12. $\sqrt{3x+18} > x+5$

15.13. $\sqrt{4a-3x} > 3x+1$

15.14. $\sqrt{12x+a} \geq 5-2x$

15.15. $\sqrt{7x-9a} \geq 3x+4$

15.16. $\sqrt{5x-2} > 3a-x$

15.17. $\sqrt{13x+5a} > 4x-2$

15.18. $\sqrt{3x+4} \geq 3x+2a$

15.19. $\sqrt{9x-7a} \geq x-2$

15.20. $\sqrt{14x+11} > a-2x$

12. Тригонометричні рівняння

В даному розділі будемо розглядати найпростіші тригонометричні рівняння виду

$$\sin x = f(a) \text{ та } \cos x = f(a)$$

та рівняння, що зводяться до них.

Головним фактом, на який слід звернути увагу в рівняннях такого виду, є обмеження

$$-1 \leq f(a) \leq 1$$

для того, щоб відповідні рівняння мали розв'язок. Для тих значень параметра, для яких відповідна система умов не виконується, вказані рівняння не матимуть розв'язку.

Для прикладу розглянемо тригонометричне рівняння, що зводиться заміною до квадратного рівняння.

Приклад 16. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$\sin^2 x + 2a \sin x + a + 2 = 0$$

Розв'язання. Зробимо заміну $\sin x = t$, за умови, що $-1 \leq t \leq 1$, і отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 + 2at + a + 2 = 0.$$

Розв'язками отриманого рівняння при $a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$ є

$$\left[\begin{array}{l} t_+ = -a + \sqrt{a^2 - a - 2} \\ t_- = -a - \sqrt{a^2 - a - 2} \end{array}\right.$$

Для інших значень параметра квадратне рівняння на має розв'язків, а отже, і початкове рівняння теж не має розв'язків.

Залишилось зрозуміти, для яких значень параметра кожен з розв'язків окремо задовольняє умову $-1 \leq t \leq 1$.

1) Розглянемо значення t_+. З урахуванням вже отриманих обмежень на параметр отримаємо систему, розв'язки якої і будуть остаточною множиною значень параметра, при яких рівняння $\sin x = t_+$ матиме сенс.

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ -a + \sqrt{a^2 - a - 2} \le 1 \\ -a + \sqrt{a^2 - a - 2} \ge -1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \le 1 + a \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \ge a - 1 \end{cases}$$

Друга нерівність зводиться до наступної еквівалентної системи

$$\begin{cases} 1 + a \ge 0 \\ a^2 - a - 2 \ge 0 \\ a^2 - a - 2 \le (1 + a)^2 \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $a \in \{-1\} \cup [2; \infty)$.

Третя нерівність зводиться до еквівалентної сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 1 \ge 0 \\ a^2 - a - 2 \ge (a - 1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 < 0 \\ a^2 - a - 2 \ge 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

розв'язком якої є множина $a \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$.

Спільною частиною отриманих множин є множина $a \in \{-1\} \cup [3; \infty)$, при якій маємо остаточний розв'язок рівняння $\sin x = t_+$

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a + \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Якщо записати випадок $a = -1$ окремо, отримаємо рівняння $\sin x = 1$, розв'язок якого зручно записати у вигляді $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) Розглянемо значення t_-. Система умов в цьому випадку матиме вигляд

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ -a - \sqrt{a^2 - a - 2} \le 1 \\ -a - \sqrt{a^2 - a - 2} \ge -1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty) \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \ge -a - 1 \\ \sqrt{a^2 - a - 2} \le -a + 1 \end{cases}$$

Розв'язання другої та третьої нерівності, як і в попередньому випадку, зводиться до еквівалентної сукупності та системи. Розв'язком другої нерівності буде множина $a \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$, а третьої – множина $a \in (-\infty; -1]$. Остаточним розв'язком системи буде множина $a \in (-\infty; -1]$. При цих значеннях параметра розв'язок вихідного рівняння матиме вигляд

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a - \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

У випадку $a = -1$ знову отримаємо рівняння $\sin x = 1$, розв'язок якого вже врахований в першому випадку.

Поєднуючи результати обох випадків, отримаємо остаточну відповідь.

Відповідь: якщо $a \in (-1; 3)$, то розв'язків немає,

якщо $a = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

якщо $a \in (-\infty; -1)$, то

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a - \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

якщо $a \in [3; \infty)$, то

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-a + \sqrt{a^2 - a - 2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Задачі для самостійної роботи.

16. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

16.1. $(a + 2)\sin^2 x + (6a + 2)\sin x - a + 3 = 0$

16.2. $\cos^4 x - (7a + 5)\sin^2 x + a + 2 = 0$

16.3. $\cos^2 x + (1 - a)\sin x - 4a - 6 = 0$

16.4. $\sin x + \sin 3x = 2(a^2 + 2a)\cos x$

16.5. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 7 - a^2$

16.6. $\cos^2 2x - (3a + 5)\cos 2x + 2a + 3 = 0$

16.7. $\cos 5x + \cos 3x = (2 - a^2)\cos x$

16.8. $(a + 3)\sin^2 x + (a - 7)\cos x + 2a - 8 = 0$

16.9. $\sin^2 3x - \frac{3-7a}{4a-1}\sin 3x - \frac{5}{4a-1} = 0$

16.10. $\cos 2x - (5a + 9)\cos x - a + 2 = 0$

16.11. $\cos 7x - \cos 3x = (-a^2 + 3a + 6)\sin 2x$

16.12. $\sin^4 x + (3a - 1)\cos^2 x + 2a + 6 = 0$

16.13. $(a - 3)\cos^2 2x - (5a - 11)\sin 2x - 5a + 15 = 0$

16.14. $(a + 5)\cos^2 5x + (3a - 9)\cos 5x - 4a + 5 = 0$

16.15. $2\cos 2x + 2(a - 1)\cos x - 5a - 8 = 0$

16.16.$\sin 6x - \sin 2x = (a^2 + 2a + 6)\sin 2x$

16.17. $(a + 7)\cos^4 2x - (4a - 8)\cos^2 2x - 3a + 3 = 0$

16.18. $(6 - 3a)\sin^2 3x - 2(2a - 1)\sin 3x + 3a + 4 = 0$

16.19. $\cos 2x + (3a + 7)\cos x + 4a + 7 = 0$

16.20. $\sin 2x + \sin 4x = \frac{a-1}{2a+3}\sin 3x$

13. Показникові рівняння

Будемо розглядати рівняння виду

$$a^x = b, a > 0, a \neq 1$$

та рівняння, що до нього зводяться.

У випадку $b \leq 0$ таке рівняння не має розв'язків, а при $b > 0$ маємо розв'язок $x = \log_a b$.

В якості прикладу розглянемо показникове рівняння, що зводиться заміною змінної до квадратного рівняння.

Приклад 17. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$4^x + 2(a-1)2^x + a + 5 = 0$$

Розв'язання. Зробимо заміну $2^x = t$, за умови, що $t > 0$, і отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 + 2(a-1)t + a + 5 = 0.$$

Дискримінант отриманого рівняння після перетворення має вигляд $D(a) = 4(a^2 - 3a - 4)$, тому за умови $4(a^2 - 3a - 4) \geq 0$, звідки $a \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$, маємо розв'язки рівняння

$$t_+ = 1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4} \text{ та } t_- = 1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4}.$$

Залишилось визначити, при яких значеннях параметра кожен розв'язок окремо задовольняє умову $t > 0$.

1) Для значення t_+ умова $t > 0$ має вигляд

$$1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4} > 0 \text{ або } \sqrt{a^2 - 3a - 4} > a - 1.$$

Остання нерівність зводиться до сукупності

$$\left[\begin{array}{c} \begin{cases} a - 1 \geq 0 \\ a^2 - 3a - 4 \geq (a-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 < 0 \\ a^2 - 3a - 4 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ або } \left[\begin{array}{c} \begin{cases} a \geq 1 \\ a < -5 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 1 \\ a \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty) \end{cases} \end{array}\right.$$

Перша система нерівностей не має розв'язків, друга дає множину розв'язків $a \in (-\infty; -1]$, що і утворюють розв'язок сукупності. Для таких значень параметра рівняння

$$2^x = 1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4}$$

має розв'язок $x = \log_2(1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4})$.

2) Для значення $t_- = 1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4}$ умова $t > 0$ перетвориться на

$$1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4} > 0 \text{ або } \sqrt{a^2 - 3a - 4} < 1 - a.$$

Розв'язуючи останню нерівність перейдемо до системи

$$\begin{cases} 1 - a \geq 0 \\ a^2 - 3a - 4 \geq 0 \\ a^2 - 3a - 4 < (1 - a)^2 \end{cases}$$

яка має розв'язком множиину $a \in (-5; 1]$. Отже, для таких значень параметра рівняння має розв'язок $x = \log_2(1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4})$.

Відповідь: якщо $a \in (-1; \infty)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in (-\infty; -5]$, то $x = \log_2(1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4})$,

якщо $a \in (-5; -1]$, то $x = \log_2(1 - a + \sqrt{a^2 - 3a - 4})$

та $x = \log_2(1 - a - \sqrt{a^2 - 3a - 4})$.

Задачі для самостійної роботи.

17. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

17.1. $(a + 3)9^x + 4 \cdot 3^x + a + 3 = 0$

17.2. $36^x + 2a \cdot 6^x + 2a + 3 = 0$

17.3. $5^{2x} - (3a + 1)5^x + a + 2 = 0$

17.4. $4^x + 4a \cdot 2^x + a + 5 = 0$

17.5. $9^x + 2(a - 1)3^x - a + 3 = 0$

17.6. $7^{2x} + (a - 3)7^x + a + 2 = 0$

17.7. $4^x - 8 \cdot 2^x - 8a + 8 = 0$

17.8. $25^x + 2a \cdot 5^x + a + 2 = 0$

17.9. $36^x - 2a \cdot 6^x - 63 = 0$

17.10. $7^{2x} + 3a \cdot 7^x - 4 = 0$

17.11. $5^{2x} + 2 \cdot (5a - 3)5^x + 5a - 1 = 0$

17.12. $49^x + (a - 1)7^x + 1 - 2a = 0$

17.13. $4^x - 3 \cdot 2^x + 5a - 4 = 0$

17.14. $(a - 2)4^x - (4 - 2a)2^x + 3 = 0$

17.15. $9^x - (5 - a)3^x + 6 - 2a = 0$

17.16. $a \cdot 7^{2x} - (a - 7)7^x + 9 = 0$

17.17. $4^x - (2a - 2)2^x + a + 5 = 0$

17.18. $25^x - 2a \cdot 5^x - 3a^2 + 4a = 0$

17.19. $36^x + a \cdot 6^x + a^2 - 1 = 0$

17.20. $9^x - (7a + 1)3^x - 7a + 2 = 0$

14. Показникові нерівності

Розглянемо найпростіші показникові нерівності, для кожної з яких $a > 0, a \neq 1$

$$a^x \leq b \text{ або } a^x \geq b.$$

При розв'язанні таких нерівностей виникають два випадки:

1) якщо $b > 0$, то розв'язок найпростіших нерівностей залежить від значення a
   а. якщо $a > 1$, то нерівність $a^x \leq b$ має розв'язок $x \leq \log_a b$, а нерівність $a^x \geq b$ має розв'язок $x \geq \log_a b$;
   б. якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^x \leq b$ має розв'язок $x \geq \log_a b$, а нерівність $a^x \geq b$ має розв'язок $x \leq \log_a b$.
2) якщо $b \leq 0$, то нерівність $a^x \leq b$ не має розв'язків, а множиною розв'яків нерівності $a^x \geq b$ є всі дійсні числа.

Зауваження. Якщо в нерівностях $a^x \leq b$ та $a^x \geq b$ замінити знак нерівності на строгий, тобто розглянути відповідно нерівності $a^x < b$ та $a^x > b$, то у відповіді, де присутня нерівність, теж треба замінити відповідний знак нерівності на строгий.

Приклад 18. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

$$9^x - 2a3^x + 2a + 3 \geq 0$$

Розв'язання. Зробимо заміну $3^x = t$ за умови $t > 0$, тобто отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

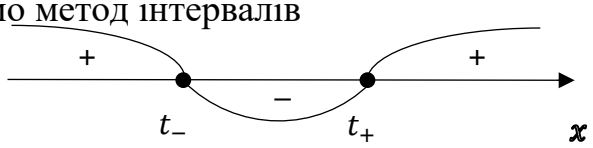
Знайдемо спочатку корені рівняння $t^2 - 2at + 2a + 3 = 0$. Дискримінант цього рівняння дорівнює $D(a) = 4(a^2 - 2a - 3)$. За умови $4(a^2 - 2a - 3) \geq 0$ або $a \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$, рівняння має корені

$$t_+ = a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} \text{ та } t_- = a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}.$$

Зауважимо, що в даному прикладі при будь якому значенні параметра $t_+ \geq t_-$, але якщо вираз для коренів містить значення параметра в знаменнику, то треба розглядати два випадки $t_+ \geq t_-$ та $t_+ \leq t_-$.

Отримавши корені, повернемось до розв'язання системи нерівностей.

1) У випадку, коли $a \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$, до нерівності $t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0$ застосуємо метод інтервалів



Тобто множина розв'язків нерівності має вигляд $t \in (-\infty; t_-] \cup [t_+; \infty)$. Для того, щоб знайти розв'язок системи треба розглянути три випадки.

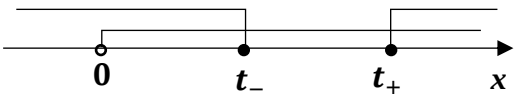
a. $t_- > 0$ або $a - \sqrt{a^2 - 2a - 3} > 0$, звідки $\sqrt{a^2 - 2a - 3} < a$, що призводить до наступної системи умов щодо параметра

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty) \\ a^2 - 2a - 3 < a^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a > 0 \\ a \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty) \\ a > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $a \in (3; \infty)$. В цьому випадку множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

буде спільною частиною множин на наступному рисунку



Отже, розв'язком системи відносно змінної t буде множина $t \in (0; t_-] \cup [t_+; \infty)$, яку можна записати у вигляді сукупності двох умов

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t \leq t_- \\ t \geq t_+ \end{array}\right.$$

Повертаючись до змінної x отримаємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 3^x \leq a - \sqrt{a^2 - 2a - 3} \\ 3^x \geq a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} \end{array}\right.$$

Кожна з отриманих нерівностей є найпростішою, тому для її розв'язання можна скористатися правилами, наведеними на початку розділу. Тоді при $a \in (3; \infty)$ остаточним ров'язком буде множина

$$x \in \left(-\infty; \log_3\left(a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right)\right] \cup [\log_3\left(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right); \infty).$$

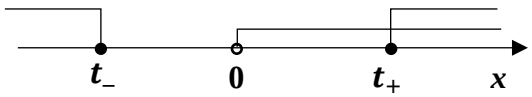
б. $t_- \leq 0 < t_+$, що приводить до системи нерівностей

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2 - 2a - 3} \leq 0 \\ a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} > 0 \end{cases}$$

Множина розв'язків першої нерівності системи $a \in (-\infty; -1)$, а множина розв'язків другої нерівності $a \in (-\infty; -1{,}5) \cup (3; \infty)$, отже множина розв'язків системи матиме вигляд $a \in (-\infty; -1{,}5)$. В цьому випадку множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

буде спільною частиною множин на наступному рисунку



Отже, розв'язком системи відносно змінної t буде множина $t \in (t_+; \infty)$, яку можна записати у вигляді умови $t \geq t_+$. Повертаючись до змінної x, отримаємо нерівність

$$3^x \geq a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}$$

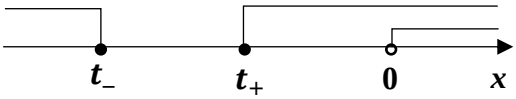
з якої остаточна множина роз'вязків при $a \in (-\infty; -1{,}5)$ має вигляд

$$x \in [\log_3\left(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right); \infty).$$

в. $t_+ \leq 0$, звідки випливає неірвність $a + \sqrt{a^2 - 2a - 3} \leq 0$, що виконується для всіх $a \in [-1{,}5; -1)$. В цьому випадку множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

буде спільною частиною множин на наступному рисунку



Отже, розв'язком системи відносно змінної t буде множина $t \in (0; \infty)$ або $t > 0$, але вираз 3^x задовольняє умову $3^x > 0$ при будь-якому значенні змінної. Тобто при $a \in [-1{,}5; -1)$ x – будь-яке число.

2) У випадку, коли $a \in [-1; 3]$, будь-яке значення t є розв'язком нерівності $t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0$, оскільки $D(a) \leq 0$ та гілки параболи напрямлені вгору. А отже, множина розв'язків системи

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 2at + 2a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

задовольняє тільки умову $t > 0$ або $3^x > 0$, що вірно для будь-якого значення змінної x. Тобто при $a \in [-1; 3]$ x – будь-яке число.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1{,}5)$, то $x \in [\log_3\left(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right); \infty)$

якщо $a \in [-1{,}5; 3]$, то x – будь-яке число,

якщо $a \in (3; \infty)$,то

$$x \in \left(-\infty; \log_3\left(a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right)\right] \cup [\log_3\left(a + \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right); \infty).$$

Задачі для самостійної роботи.

18. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

18.1. $4^x + 2(2a + 1)2^x + a + 2 \geq 0$

18.2. $(3a + 4)9^x - 2a \cdot 3^x + 8a + 9 \leq 0$

18.3. $25^x - 4a \cdot 5^x + a + 5 < 0$

18.4. $(0{,}01)^x - (a + 8)(0{,}1)^x + a + 16 \geq 0$

18.5. $8 \cdot 49^x - 8a \cdot 7^x + a + 3 < 0$

18.6. $2a \cdot (0{,}04)^x + (3a - 1)(0{,}2)^x + 2a \geq 0$

18.7. $2^x + 2a\left(\sqrt{2}\right)^x + a + 2 \geq 0$

18.8. $9^{x+1} - (2a + 8)3^x + a + 2 > 0$

18.9. $(0{,}5a+1)36^x+(3a+5)6^x-a+1\geq 0$

18.10. $3a\left(\frac{4}{9}\right)^x-6\left(\frac{2}{3}\right)^x+5a+2<0$

18.11. $(a+3)9^x-4\cdot 3^x+a+3\geq 0$

18.12. $100^x-(7a+1)10^x-5a+4\geq 0$

18.13. $(0{,}49)^x+2a(0{,}7)^x+1\geq 0$

18.14. $3\cdot 9^x-6a\cdot 3^x-4a-1\geq 0$

18.15. $5^{2x}-8\cdot 5^x-8a+8<0$

18.16. $9^x-(2a-2)3^x+a+5>0$

18.17. $a\cdot 9^x+4a3^x+5a+1<0$

18.18. $25^x+(a-4)5^x+\frac{25}{4}<0$

18.19. $(4a-5)\left(\frac{4}{9}\right)^x+12\left(\frac{2}{3}\right)^x-a-5\geq 0$

18.20. $6^{2x}+(a-3)6^x+a+2<0.$

15. Логарифмічні рівняння

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд

$$\log_a x = b, a > 0, a \neq 1.$$

При будь-якому значенні b розв'язком цього рівняння є значення

$$x = a^b.$$

Розглянемо логарифмічне рівняння, що зводиться заміною змінної до квадратного рівняння.

Приклад 19. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

$$a\log_2^2 x + 2a\log_2 x + 2 = 0$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $\log_2 x = t$ та отримаємо рівняння

$$at^2 + 2at + 2 = 0.$$

У випадку $a = 0$ це рівняння не є квадратним, тому розглянемо цей випадок окремо. Підставивши відповідне значення в рівняння, отримаємо числову рівність $2 = 0$, що не є правильною, отже в цьому випадку рівняння не має розв'язків.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння є квадратним і його дискримінант має вигляд $D(a) = 4a^2 - 8a = 4a(a-2)$.

Квадратне рівняння має розв'язки у випадку, коли $\mathrm{D}(a) > 0$ або $\mathrm{D}(a) = 0$.

Якщо $\mathrm{D}(a) > 0$, то отримаємо нерівність відносно параметра

$$4a(a-2) > 0,$$

множина розв'язків якої за методом інтервалів $a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. Для отриманих значень параметра корені квадратного рівняння мають вигляд

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 2a}}{a} \\ t = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 2a}}{a} \end{array}\right.$$

Оскільки ми не мали жодних обмежень щодо значень параметра, то повертаючись до змінної x, отримаємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x = \frac{-a+\sqrt{a^2-2a}}{a} \\ \log_2 x = \frac{-a-\sqrt{a^2-2a}}{a}\end{array}\right., \text{ звідки } \left[\begin{array}{l}x = 2^{\frac{-a+\sqrt{a^2-2a}}{a}} \\ x = 2^{\frac{-a-\sqrt{a^2-2a}}{a}}\end{array}\right.$$

Якщо $\mathrm{D}(a) = 0$ і при цьому $a \neq 0$, то отримаємо значення параметра $a = 2$, яке можна підставити в вихідне рівняння. Тоді квадратне рівняння має єдиний корінь $t = -1$, звідки отрмаємо логарифмічне рівняння $\log_2 x = -1$, що має розв'язок $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: якщо $a \in [0; 2)$, то розв'язків немає,

якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,то $x = 2^{\frac{-a+\sqrt{a^2-2a}}{a}}$ та $x = 2^{\frac{-a-\sqrt{a^2-2a}}{a}}$,

якщо $a = 2$, то $x = \frac{1}{2}$.

Задачі для самостійної роботи.

19. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

19.1. $\log_4(x + a) + \log_4(x - 5a) = 3$

19.2. $5a \log_{0,7}^2 x - 8a \log_{0,7} x - 85 = 0$

19.3. $3a \lg^2 x + 8a \lg x - 3 = 0$

19.4. $a \log_2^2 x - 2a \log_2 x - 63 = 0$

19.5. $\log_5 x + \log_5(x - a) = 1$

19.6. $3a \log_3^2 x - 2a \log_3 x - 3 = 0$

19.7. $\log_a^2 x - \log_a x = 0$

19.8. $a \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 3a \log_{\frac{1}{3}} x - 40 = 0$

19.9. $a \log_2^2 x - a \log_{\frac{1}{2}} x^4 - 21 = 0$

19.10. $\log_2(x + 14) + \log_2(x + a) = 6$

19.11. $2a \log_6^2 x + 9a \log_6 x - 5 = 0$

19.12. $a \log_{0,1}^2 x + a \log_{0,1} x - 12 = 0$

19.13. $\lg(x - a) - \lg(x + 2a) = 0$

19.14. $a \log_4^2 x + 3a \log_4 x - 4 = 0$

19.15. $9a \log_{\sqrt{3}}^2 x - 28a \log_{\sqrt{3}} x + 3 = 0$

19.16. $3a \log_2^2 x - a \log_2 x - 2 = 0$

19.17. $2a \log_6^2 x + 9a \log_6 x - 5 = 0$

19.18. $a \log_5^2 x + 5a \log_5 x - 6 = 0$

19.19. $\log_a^2 x - 8\log_a x + 7 = 0$

19.20. $\log_2(x + 5a) + \log_2(x - 4a) = 5$

16. Логарифмічні нерівності

Розглянемо найпростіші логарифмічні нерівності, для кожної з яких $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a x \leq b \text{ та } \log_a x \geq b.$$

При розв'язанні таких нерівностей виникають два випадки:

1) якщо $a > 1$, то
   а. нерівність $\log_a x \leq b$ зводиться до $0 < x \leq a^b$;
   б. нерівність $\log_a x \geq b$ зводиться до $x \geq a^b$.
2) якщо $0 < a < 1$, то
   а. нерівність $\log_a x \leq b$ зводиться до $x \geq a^b$;
   б. нерівність $\log_a x \geq b$ зводиться до $0 < x \leq a^b$.

Зауваження. Якщо в нерівностях $\log_a x \leq b$ або $\log_a x \geq b$ замінити знак нерівності на строгий, тобто розглянути відповідно нерівності $\log_a x < b$ та $\log_a x > b$, то у нерівностях, які з них випливають теж треба замінити відповідний знак нерівності на строгий.

Приклад 20. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

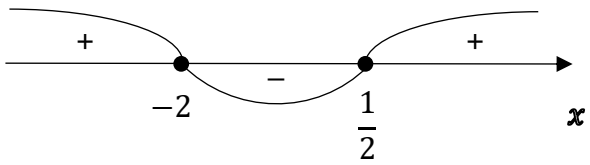
$$2\log_a^2 x + 3\log_a x - 2 \leq 0$$

Розв'язання. Зауважимо, що при $a \leq 0$ та $a = 1$ вираз $\log_a x$ не визначений, а отже в цьому випадку нерівність не має розв'язків.

У випадку $a > 0, a \neq 1$ зробимо заміну $\log_a x = t$, і отримаємо квадратну нерівність

$$2t^2 + 3t - 2 \leq 0.$$

Коренями відповідного квадратного рівняння $2t^2 + 3t - 2 = 0$ є $t = \frac{1}{2}$ та $t = -2$, тому, користуючись методом інтервалів, за допомогою наступного рисунка



знайдемо множину розв'язків квадратної нерівності $t \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$, яку можна записати у вигляді системи умов

$$\begin{cases} t \le \dfrac{1}{2} \\ t \ge -2 \end{cases}$$

Повертаючись до змінної x, отримаємо систему найпростіших логарифмічних нерівностей

$$\begin{cases} \log_a x \le \dfrac{1}{2} \\ \log_a x \ge -2 \end{cases}$$

При розв'язанні отриманої системи треба розглянути два випадки, оскільки основа логарифмів залежить від значення параметра.

1) $a > 1$, тоді отримана логарифмічна система зводиться до наступної системи

$$\begin{cases} 0 < x \le a^{\frac{1}{2}} \\ x \ge a^{-2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \le \sqrt{a} \\ x \ge \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $x \in \left[\frac{1}{a^2}; \sqrt{a}\right]$.

2) $0 < a < 1$, тоді отримана логарифмічна система зводиться до наступної системи

$$\begin{cases} x \ge a^{\frac{1}{2}} \\ 0 < x \le a^{-2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \ge \sqrt{a} \\ x \le \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

розв'язком якої є множина $x \in \left[\sqrt{a}; \frac{1}{a^2}\right]$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$, то розв'язків немає,

якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in \left[\sqrt{a}; \frac{1}{a^2}\right]$,

якщо $a \in (1; \infty)$, то $x \in \left[\frac{1}{a^2}; \sqrt{a}\right]$.

Задачі для самостійної роботи.

20. Для всіх значень параметра a розв'язати нерівність

20.1.2 $\log_a^2 x + 5\log_a x + 2 \geq 0$

20.2. $\log_a^2 x + 6\log_a x + 5 \leq 0$

20.3. $\log_a^2 x - 4\log_a x + 3 \geq 0$

20.4. $\log_a^2 x - 2\log_a x < 0$

20.5. $\log_a^2 x + 2\log_a x - 3 \geq 0$

20.6. $\log_a^2 x - \log_a x - 3 \leq 0$

20.7. $9\log_a^2 x - 10\log_a x + 1 > 0$

20.8.$\log_a^2(x-1) \geq 4$

20.9. $\log_a^2 x - 3\log_a x - 4 \leq 0$

20.10. $\log_a^2 x - 2\log_a x - 8 < 0$

20.11. $2\log_a^2 x + 3\log_a x - 2 \geq 0$

20.12. $7\log_a^2 x - 8\log_a x + 1 \leq 0$

20.13. $3\log_a^2 x - 10\log_a x + 3 > 0$

20.14. $\log_a^2 x + \log_a x \leq 2$

20.15. $\log_a^2(2x-1) > 9$

20.16. $\log_a^2 x - \log_a x - 6 < 0$

20.17. $2\log_a^2 x - \log_a x - 3 \geq 0$

20.18. $\log_a^2(x-1) + 6 > 5\log_a(x-1)$

20.19. $\log_a^2(2-x) \geq 1$

20.20. $2\log_a^2 x + 9\log_a x - 5 < 0$

17. Графічний метод

Серед задач з параметрами можна виділити багато випадків, в яких головним кроком розв'язання є побудова графіків функцій, що утворюються з виразів, які входять до заданого рівняння, нерівності або системи.

Як приклад розглянемо рівняння. Будь-яке рівняння можна подати у вигляді

$$f(x) = g(x) \tag{9}$$

Тоді можна розглянути дві функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, і розв'язання рівняння в цьому випадку можна звести до пошуку спільних точок графіків розглянутих функцій, абсциси яких і будуть розв'язками рівняння (1).

Зауважимо, що в задачах з параметрами функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ можуть містити в своєму виразі параметр, але параметр не вважається змінною, від якої залежить значення функції. Натомість будемо вважати, що мова йде про сімейство функцій, яке при кожному конкретному значенні параметра перетворюється на функцію від змінної x. Зважаючи на це, при побудові зображення фіксується декілька ключових значень параметра і для кожного з них будуються графіки відповідних функцій.

Можна виділити дві умови, виконання яких є підставою для найбільш ефективного застосування графічного методу:

1) Можливість побудови графіків функцій, що входять до рівняння (1) за допомогою перетворень графіків елементарних функцій або шляхом розкриття модулів.

2) Питання задачі стосується значень параметра, при яких встановлюється певна кількість розв'язків без необхідності наводити самі розв'язки, які знайти за допомогою графіків, в більшості випадків, неможливо.

Враховуючи другу умову, стає зрозумілим, що ключові значення параметра, для яких має сенс виконувати побудову графіків, забезпечують потрібну за умовою кількість розв'язків, або перехід від ситуації з однією кількістю розв'язків до іншої.

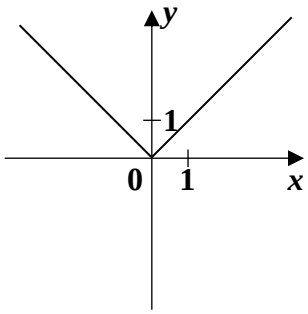
Приклад 17.1. З'ясувати, скільки коренів має рівняння в залежності від значень параметра a

$$\big||x+1|-2\big| = a$$

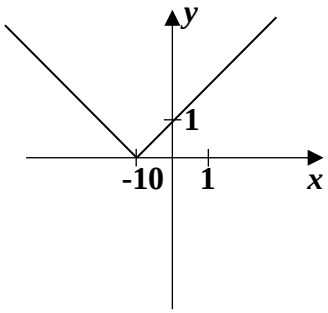
Розв'язання. Розглянемо функції $y = \big||x+1|-2\big|$ та $y = a$. Розв'язання задачі зводиться до побудови графіка першої функції та його комбінації з усіма можливими (в залежності від значень параметра a) положеннями графіка $y = a$ з метою встановлення кількості спільних точок.

Побудова графіка функції $y = \big||x+1|-2\big|$ ґрунтується на перетворенні графіка елементарної функції (докладно про перетворення графіків функцій дивись в додатку) та складається з наступних етапів.

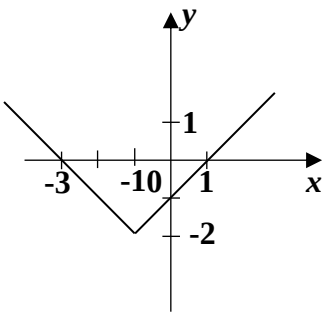
1) Побудова графіка $y = |x|$.



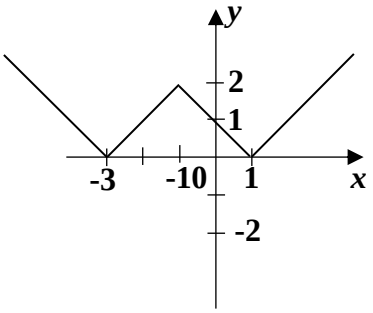
2) Побудова графіка $y = |x+1|$ за допомогою зсуву на одиницю вліво вздовж осі Ox.



3) Побудова графіка $y = |x + 1| - 2$ за допомогою зсуву на дві одиниці вниз вздовж осі Oy.

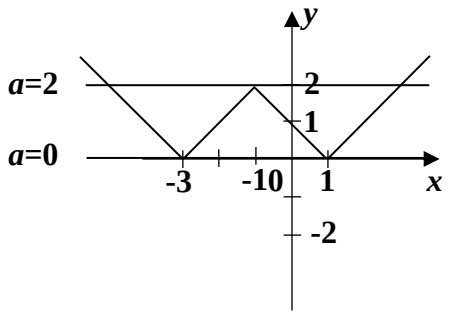


4) Побудова графіка $y = \big||x + 1| - 2\big|$ шляхом симетричного відображення відносно осі Ox тих точок попереднього графіка, які мали від'ємну



ординату.

Графіком функції $y = a$ є пряма, паралельна осі Ox, що перетинає вісь Oy в точці $(0; a)$. Зобразимо ключові положення цього графіка відносно графіка



функції $y = \big||x + 1| - 2\big|$, за яких відбувається зміна в кількості спільних точок.

Аналізуючи всі можливі положення прямої $y = a$, отримаємо відповідь.

Відповідь: якщо $a < 0$ то немає коренів,

якщо $a = 0$ та $a > 2,$, то маємо два корені,

якщо $0 < a < 2$, то маємо чотири корені,

якщо $a = 2$, то маємо три корені.

Приклад 17.2. Вказати значення параметра a, при яких рівняння має єдиний розв'язок

$$\sqrt{2|x| - x^2} - x = a$$

Розв'язання. Для того, щоб розбити ліву та праву частину рівняння на дві функції, графіки яких зручно будувати, перепишемо рівняння у вигляді

$$\sqrt{2|x| - x^2} = x + a$$

Тепер розглянемо функції $y = \sqrt{2|x| - x^2}$ та $y = x + a$.

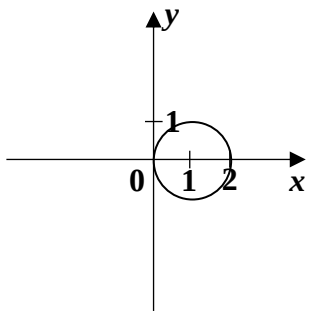
Для побудови графіка першої функції перейдемо до еквівалентної системи

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 2|x| - x^2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 - 2|x| + y^2 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} y \geq 0 \\ (|x| - 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Для побудови множини точок, що визначається отриманою системою, почнемо з побудови кола, що задається рівнянням

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

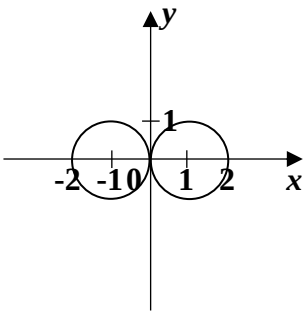
та має центр в точці $(1; 0)$ і радіус 1.



Для того, щоб перетворити побудовану множину точок на таку, що задовольняє рівняння

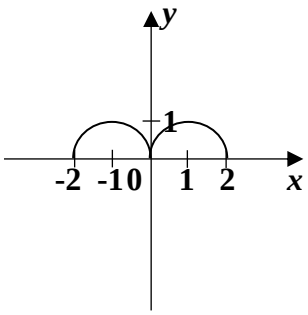
$$(|x| - 1)^2 + y^2 = 1,$$

застосуємо перетворення модуль до змінної x, що крім отриманих точок дасть точки симетричні відносно осі Ox (докладно про побудову графіка з відповідним



перетворенням дивись у додатку).

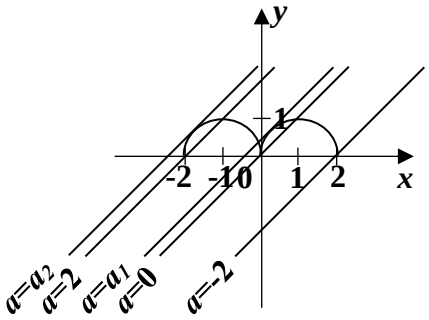
Остаточно, після врахування умови $y \geq 0$, отримаємо графік першої



функції.

Графіком функції $y = x + a$ є пряма з фіксованим кутовим коефіцієнтом $k = 1$, яка перетинає вісь Oy в точці з координатами $(0; a)$.

Зобразимо ключові положення цієї прямої, за яких відбувається зміна кількості спільних точок графіків.



Для тих прямих, які проходять через точку осі Ox з відомими координатами, легко визначити значення параметрів, що їм відповідають. Це можна зробити або підставивши координати точки в рівняння прямої або враховуючи зсув прямої $y = x$ на $-a$ одиниць вздовж осі Ox.

Так, наприклад, через точку $(2;0)$ проходить пряма, якій відповідає значення $a=-2$, яке можна отримати з умови $0=2+a$ або враховуючи, що потрібен зсув прямої $y=x$ на дві одиниці вправо вздовж осі $0x$. Для решти прямих, що проходять через відомі точки, відповідні значення параметра знаходяться аналогічно і вказані на рисунку.

Залишилось з'ясувати значення параметрів, що на рисунку позначені через a_1 та a_2, в яких відбувається дотик прямої $y=x+a$ до побудованих півкіл. При цьому можна застосувати два підходи: через кутовий коефіцієнт дотичної (загальний метод, що підходить для будь-якої функції, до якої дотикається пряма, рівняння якої ми шукаємо) або підхід з використанням геометричних міркувань, зокрема, властивості радіуса кола, проведеного в точку дотику.

Для знаходження a_1 застосуємо перший підхід. По-перше, зауважимо, що та частина графіка функції, в якій відбувається дотик з прямою $y=x+a_1$ має тільки додатні значення абсцис, тому для них замінимо $|x|$ на x і отримаємо функцію

$$y=\sqrt{2x-x^2} \tag{10}$$

Тепер наша мета знайти координати точки дотику цієї функції з прямою $y=x+a_1$, що має кутовий коефіцієнт $k=1$, тому для точки дотику $(x_0;y(x_0))$ справджується рівність

$$y'(x_0)=1 \text{ або } \frac{1-x_0}{\sqrt{2x_0-x_0^2}}=1$$

Розв'яжемо останнє рівняння (докладно про розв'язання ірраціональних рівнянь дивись розділ 10). Скористаємось пропорцією, враховуючи, що в точці дотику $x_0\neq 0$ та $x_0\neq 2$ (видно з рисунка).

$$\sqrt{2x_0-x_0^2}=1-x_0$$

Переходимо до еквівалентної системи.

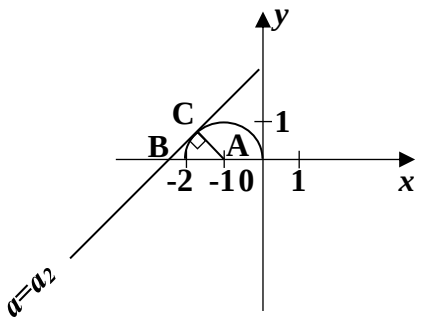
$$\begin{cases}1-x_0\geq 0\\ 2x_0-x_0^2=1-2x_0+x_0^2\end{cases}\begin{cases}x_0\leq 1\\ 2x_0^2-4x_0+1=0\end{cases}\begin{cases}x_0\leq 1\\ x_0=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Розв'язок системи $x_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ми підставимо в $f(x) = g(x)$ (9)(10) для отримання ординати точки дотику

$$y(x_0) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Тобто дотик відбувається в точці $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, тому пряма $y = x + a_1$ через неї проходить, отже, має місце рівність $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + a_1$, звідки і знаходиться необхідне значення параметра $a_1 = \sqrt{2} - 1$.

Для знаходження параметра a_2 можна скористатись тими ж міркуваннями, але застосованими до функції $y = \sqrt{-2x - x^2}$. Читачеві пропонується зробити це самостійно у вигляді вправи. Ми ж використаємо для цього геометричний підхід, який можна застосовувати в ситуації, коли графіком функції, до якої відбувається дотик, є частина кола. Відтворимо тільки ту частину попереднього рисунка, про яку далі буде мова.



Позначимо через A центр півкола, через B – точку перетину прямої $y = x + a_2$ з віссю Ox, через точку C – точку дотику.

За властивістю радіуса, що проведений в точку дотику $\angle ACB = 90°$. Оскільки пряма $y = x + a_2$ має кутовий коефіцієнт $k = 1$, то $\operatorname{tg} \angle ABC = 1$, отже, $\angle ABC = 45°$. Також $AC = 1$ як радіус півкола. Тому, з трикутника ABC маємо $\sin \angle ABC = \frac{AC}{AB}$, звідки $AB = \sqrt{2}$, що дає змогу встановити координати точки $B(\sqrt{2} + 1; 0)$, а разом з цим і значення параметра $a_2 = \sqrt{2} + 1$, оскільки значення a_2 встановлює величину зсуву вліво прямої $y = x$.

Поєднавши всі отримані ключові значення параметра, можна обрати ту множину значень, коли рівняння має єдиний розв'язок.

Відповідь: $a \in [-2; 0) \cup \left(\sqrt{2} - 1; 2\right) \cup \{\sqrt{2} + 1\}$.

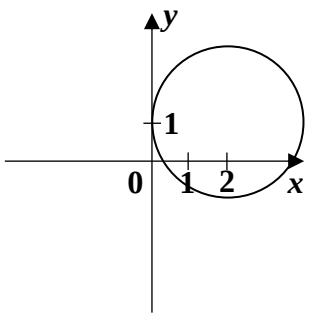
Зауваження. Особливість застосування графічного методу при розв'язання систем рівнянь з параметрами полягає в тому, що лінії, спільні точки яких треба шукати для отримання розв'язків системи, визначаються окремо кожним рівнянням, причому це можуть бути як графіки функцій так і інші множини точок на площині (наприклад, коло).

Приклад 17.3. Вказати значення параметра a, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок

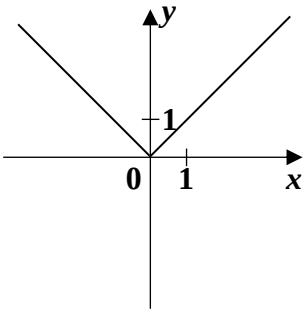
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ y = a - |x-2| \end{cases}$$

Розв'язання. Для даної задачі можна застосувати два способи розв'язання: за допомогою графічного та аналітичного методів. Графічний метод буде розглянуто далі, а аналітичний варіант розв'язання цієї задачі наведено в прикладі до розділу 18.

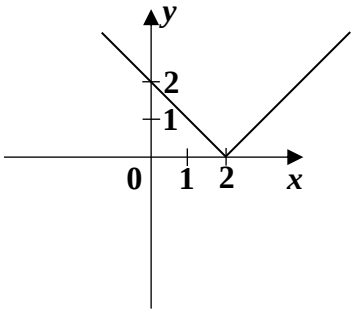
Побудуємо множину точок, що задається першим рівнянням. Це коло, центр якого знаходиться в точці з координатами $(2; 1)$, а радіус дорівнює 2.



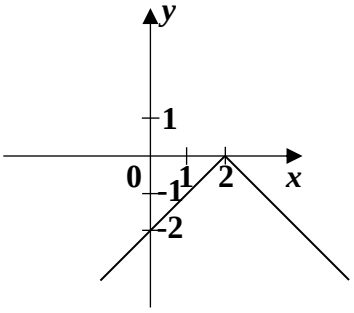
Для побудови лінії, що визначається другим рівнянням, потрібно виконати перетворення графіка функції $y = |x|$, який має наступний вигляд.



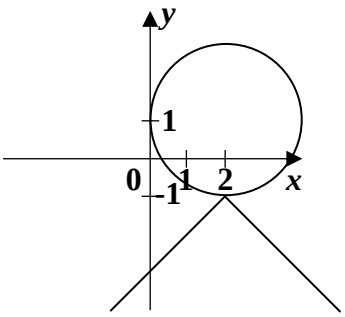
Для отримання графіка функції $y = |x - 2|$ потрібно виконати зсув графіка функції $y = |x|$ вздовж осі Ox на 2 одиниці вправо.



Перетворення, пов'язане з симетрією відносно осі Ox, призведе до побудови графіка функції $y = -|x - 2|$.



Останнє перетворення буде забезпечувати зсув отриманого графіка вгору або вниз вздовж осі Oy. Враховуючи, що обидві отримані лінії мають вісь симетрії $x = 2$, для того, щоб вони мали єдину спільну точку, вона має міститись саме на осі симетрії. Тобто на графіку останньої функції точка з координатами $(2; 0)$ за рахунок зсуву вгору або вниз на $|a|$ одиниць має потрапити на коло. Одна з таких ситуацій призведе до появи трьох спільних точок для ліній, що



зображують рівняння системи, тому вона нам не потрібна. Залишається єдиний випадок взаємного розташування ліній, коли вони матимуть одну спільну точку, який досягається при $a = -1$.

Відповідь: $a = -1$.

Задачі для самостійної роботи.

17. Використовуючи графічний метод розв'язати задачу

Скільки коренів має рівняння в залежності від значень параметра a

17.1. $\frac{|x+2|(x^2+4x-12)}{x+6} = 1 - a^2$

17.2. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 = a$

17.3. $|x^2 - 4|x| + 3| = a$

17.4. $\sin x - \sin^2 x - a^2 = 1$

17.5. $\left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right| = a$

Скільки коренів має система рівнянь в залежності від значень параметра a

17.6. $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

17.7. $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

17.8. $\begin{cases} log_a(a - x^2) = log_a(a - y^2) \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y \end{cases}$

17.9. $\begin{cases} (a+5)x - 2y = 3 - a \\ x + (2+a)y = 3 \end{cases}$

17.10. $\begin{cases} |x-8|+|y|=1 \\ (x+a)^2+y^2=4 \end{cases}$

Вказати значення параметра a, при яких рівняння має єдиний розв'язок

17.11. $\sqrt{1-3|x|}=x+a$

17.12. $\frac{x^2-2x+a^2}{x+a}=0$

17.13. $|x+3|=ax-1$

17.14. $1-x=\sqrt{a^2-x^2}$

17.15. $\left|\frac{2}{x}-1\right|=ax+3$

Вказати значення параметра a, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок

17.16. $\begin{cases} (|x|-4)^2+(y-3)^2=9 \\ (x-a)^2+y^2=1 \end{cases}$

17.17. $\begin{cases} (x+3)^2+(y-4)^2=a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

17.18. $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+|y|=4 \end{cases}$

17.19. $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=9 \\ 2|x|+3y=5 \end{cases}$

17.20. $\begin{cases} x^2+y^2+6y=-8 \\ x^2+y^2-2x-6y=a^2-10 \end{cases}$

18. Використання симетрії при розв'язанні задач з параметрами

В даному розділі мова піде про задачі, умова яких задовольняє двом наступним вимогам.

1) Питання задачі стосується знаходження значень параметра, при яких задане рівняння або система мають єдиний роз'вязок.
2) Функції, які утворюють задане рівняння або систему, мають певну властивість симетрії.

Перелічимо декілька основних випадків, в яких з'являється симетрія функції.

Для рівняння

$$f(x) = 0$$

під симетрією мається на увазі парність функції $y = f(x)$, тобто для будь-якого значення змінної x з області визначення виконується умова

$$f(-x) = f(x)$$

Для системи

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{91}$$

в якості симетрії знову можна розглядати парність за однією або обома змінними. Тобто для будь-яких значень змінних x та y з області визначення для функцій $y = f_1(x, y)$ та $y = f_2(x, y)$ виконується один з наступних наборів умов:

1) $f_1(-x, y) = f_1(x, y)$ та $f_2(-x, y) = f_2(x, y)$
2) $f_1(x, -y) = f_1(x, y)$ та $f_2(x, -y) = f_2(x, y)$
3) $f_1(-x, -y) = f_1(x, y)$ та $f_2(-x, -y) = f_2(x, y)$

Але для системи (91), крім вказаних умов, симетрія може утворюватися також за допомогою набору умов

$$f_1(x, y) = f_1(y, x) \text{ та } f_2(x, y) = f_2(y, x)$$

Всі перелічені вище умови, пов'язані з симетрією, поєднує один спільний факт: функції, що утворюють задане рівняння або систему, набувають однакових значень на різних (симетричних) наборах аргументів. Якщо поєднати цей

висновок з вимогою мати єдиний розв'язок, стає зрозумілим, що відповідний розв'язок має бути симетричний сам до себе, інакше задача матиме принаймні два (симетричні) розв'язки.

Далі наведемо алгоритм розв'язання задач з використанням симетрії:

1) Зрозуміти, в чому полягає симетрія функцій, що задають конкретну задачу, та знайти елемент, який є симетричним сам до себе.
2) Підставити знайдений в пункті 1) елемент в умову задачі та знайти значення параметра, за яких він є розв'язком задачі.
3) Підставити по черзі знайдені в пункті 2) значення параметра в умову та перевірити, чи справді в цьому випадку задача матиме єдиний розв'язок.

Зауважимо, що останній пункт не можна оминути, оскільки разом з симетричним до себе розв'язком задача додатково може мати ще декілька пар симетричних розв'язків, тому відповідне значення параметра не задовольнятиме умову на єдиний розв'язок задачі.

Приклад 18.1. Знайти значення параметра a, за яких рівняння

$$x^4 + (a+1)x^2 + a^2 + 4a - 5 = 0$$

має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Розглянемо функцію, що визначає ліву частину рівняння

$$f(x) = x^4 + (a+1)x^2 + a^2 + 4a - 5$$

Ця функція є парною, тому, якщо існує таке значення x_0, що $f(x_0) = 0$, то одночасно виконується і рівність $f(-x_0) = 0$, тобто $(-x_0)$ також є розв'язком рівняння. Для того, щоб рівняння мало єдиний розв'язок, необхідно виконання умови $x_0 = -x_0$, тобто $x_0 = 0$. Таким чином знайдено значення аргументу, яке є симетричним само до себе. Підставимо його у вихідне рівняння і отримаємо наступну умову на параметр

$$a^2 + 4a - 5 = 0$$

Звідки $a = 1$ або $a = -5$.

Залишилось перевірити, чи насправді при отриманих значеннях параметра розв'язок $x = 0$ буде єдиним.

При $a = 1$ рівняння перетвориться на

$$x^4 + 2x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 2) = 0$$

Оскільки $x^2 + 2 \neq 0$ при жодному дійсному значенні змінної, то єдиним розв'язком насправді буде $x = 0$.

При $a = -5$ рівняння перетвориться на

$$x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) = 0$$

Маємо три розв'язки $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, отже, значення $a = -5$ не задовольняє умові задачі.

Відповідь: $a = 1$.

Наступний приклад вже було розв'язано в розділі 17 за допомогою графічного методу. Наведемо ще один спосіб його розв'язання, використовуючи властивість симетрії.

Приклад 18.2. Знайти значення параметра a, за яких система рівнянь має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ y = a - |x-2| \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємось методом підстановки, звільнившись в першому рівнянні від змінної y. Отримаємо рівняння

$$(x-2)^2 + (a - |x-2| - 1)^2 = 4$$

Після заміни змінних $x - 2 = t$ останнє рівняння перетвориться на

$$t^2 + (a - 1 - |t|)^2 - 4 = 0$$

(110)

Функція $f(t) = t^2 + (a - 1 - |t|)^2 - 4$ є парною, отже, єдиний розв'язок рівняння матиме в тому випадку, коли $t = 0$. Якщо підставити відповідне значення $t = 0$ в рівняння (110), то воно перетвориться на наступне рівняння відносно змінної a

$$(a-1)^2 = 4,$$

звідки $a = 3$ або $a = -1$.

Для кожного з отриманих значень параметра $t = 0$ буде розв'язком рівняння (110). Залишилось перевірити, чи буде такий розв'язок єдиним.

При $a = 3$ рівняння (110) перетвориться на

$$t^2 + (2 - |t|)^2 = 4$$

$$|t|^2 + 4 - 4|t| + |t|^2 = 4$$

$$2|t|(|t| - 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \\ t = -2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x - 2 = 2 \\ x - 2 = -2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Отримали три значення змінної x, отже, і три розв'язки системи, що відповідають значенню $a = 3$, тому воно не задовольняє умову задачі.

При $a = -1$ рівняння (110) перетвориться на

$$t^2 + (-2 - |t|)^2 = 4$$

$$t^2 + 4 + 4|t| + t^2 = 4$$

$$2|t|(|t| + 2) = 0$$

Оскільки $|t| \neq -2$, то $t = 0$ буде єдиним розв'язком рівняння (110), а отже і задана система матиме єдиний розв'язок. Тому значення $a = -1$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a = -1$.

Приклад 18.3. Знайти значення параметра a, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 4a^2 \\ x + y = 2a \end{cases}$$

(111)

Розв'язання. Розглянемо функції $f_1(x, y) = x^3 + y^3$ та $f_2(x, y) = x + y$. Тоді задана система перетвориться на

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 4a^2 \\ f_2(x, y) = 2a \end{cases}$$

Зауважимо, що для утворених функцій мають місце наступні властивості

$$f_1(x,y) = f_1(y,x) \text{ та } f_2(x,y) = f_2(y,x)$$

Тому, якщо набір (x_0, y_0) є розв'язком системи, то і набір (y_0, x_0) також є розв'язком цієї системи. Для того, щоб розв'язок був єдиним, він повинен мати вигляд (x_0, x_0), тобто повинна виконуватись умова $x = y$.

Користуючись останньою рівністю, замінимо у системі (111) змінну y на змінну x і розв'яжемо отриману систему відносно a.

$$\begin{cases} 2x^3 = 4a^2 \\ 2x = 2a \end{cases} \begin{cases} a^3 = 2a^2 \\ x = a \end{cases} \begin{cases} a^2(a-2) = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Отже, $a = 0$ або $a = 2$ задовольняють системі у випадку $x = y$. При інших значеннях параметра система не може мати єдиного розв'язку.

Залишилось перевірити, скільки розв'язків матиме система для отриманих значень параметра.

При $a = 0$ система (111) перетвориться на

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \begin{cases} -y^3 + y^3 = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

Перше рівняння системи є тотожністю, отже, система має безліч розв'язків. Тому $a = 0$ не задовольняє умові задачі.

При $a = 2$ система (111) перетвориться на

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 16 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Для спрощення першого рівняння системи скористаємось формулою суми кубів

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + x^2) = 16 \\ x + y = 4 \end{cases} \begin{cases} 4(x^2 - xy + y^2) = 16 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

Підставимо вираз замість змінної y в перше рівняння і після спрощення отримаємо систему

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Отже, $(2; 2)$ – єдиний розв'язок системи, тому значення параметра $a = 2$ задовольняє умові.

Відповідь: $a = 2$.

Задачі для самостійної роботи.

18. Знайти значення параметра a, за яких рівняння або система рівнянь має єдиний розв'язок

18.1. $x^4 - 2(a-1)x^2 + 2a + 1 = 0$

18.2. $(a-2)x^4 - 2ax^2 + 2a - 3 = 0$

18.3. $(a+3)x^4 - 2(3a-4)x^2 + a^2 - 7a - 18 = 0$

18.4. $3ax^4 + 2(3a-2)x^2 + a^2 - 10a + 9 = 0$

18.5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ a(x^2+2) = |x| + y - 2 \end{cases}$

18.6. $x^4 + 2a(x^2+1) + a + 4 = 0$

18.7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 - a \\ y = |x| + a \end{cases}$

18.8. $2x^2 + a\sin x^4 - a^2 = 0$

18.9. $\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |x| \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

18.10. $\begin{cases} 3x^2 + 2a = y - 3^{|x|} \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

18.11. $2x^2 - (3a+3)\cos x + a + 1 = 0$

18.12. $(a-4)\cos^2 x - (2a+3)x^4 + a - 4 = 0$

18.13. $ax^4 + 1 = a^2\sqrt{1-|x|}$

18.14. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2a^6 \\ xy = a^2 \end{cases}$

18.15. $a^2x^4 + |x| + x^2 = a - 1$

18.16. $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + (y-4)^2 = 1 \end{cases}$

18.17. $\begin{cases} x + y = 2a^3 \\ xy = a^2 \end{cases}$

18.18. $\begin{cases} x^2y^3 = -3a^2 \\ x^3y^2 = 3a \end{cases}$

18.19. $\begin{cases} |x+1| + y = a \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$

18.20. $\begin{cases} x^4 + 4y^4 = 5a^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7a \end{cases}$

19. Системи лінійних рівнянь з параметрами

Система лінійних рівнянь з параметрами має вигляд

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – коефіцієнти системи, які є заданими числами або виразами, що залежать від параметра.

Нас буде цікавити питання щодо кількості розв'язків такої системи. Відповідь на це питання однозначно визначається наступними умовами щодо коефіцієнтів системи.

1) Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система має єдиний розв'язок.

2) Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, але $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язків.

3) Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків.

В лінійних системах з параметром відповідні умови перетворюються на вимоги, яким, при певних значеннях параметра, повинні задовольняти коефіцієнти для отримання необхідної кількості розв'язків.

Приклад 19.1. Знайти кількість розв'язків системи в залежності від значень параметра a

$$\begin{cases} 3ax + (a^2 + 14)y = 24 \\ 2x + (a + 1)y = a \end{cases}$$

Розв'язання. Для того, щоб система мала єдиний розв'язок, має виконуватись наступна умова

$$\frac{3a}{2} \neq \frac{a^2 + 14}{a + 1}$$

Якщо скористатись пропорцією, в якій знак рівності замінити на знак не дорівнює і спростити, отримаємо

$$a^2 + 3a - 28 \neq 0$$

звідки $a \neq -7$ та $a \neq 4$, тобто система матиме єдиний розв'язок при всіх значеннях параметра, крім $a = -7$ та $a = 4$.

Для того, щоб система не мала розв'язків, мають виконуватись наступні умови

$$\begin{cases} \dfrac{3a}{2} = \dfrac{a^2+14}{a+1} \\ \dfrac{3a}{2} \neq \dfrac{24}{a} \end{cases}$$

Перша умова виконується при $a = -7$ або при $a = 4$. Друга умова після спрощення перетворюється на $a^2 \neq 16$, тому тільки $a = -7$ є розв'язком системи.

Нарешті, система буде мати безліч розв'язків, якщо виконаються наступні умови

$$\begin{cases} \dfrac{3a}{2} = \dfrac{a^2+14}{a+1} \\ \dfrac{3a}{2} = \dfrac{24}{a} \end{cases}$$

Дана система має розв'язок $a = 4$.

Відповідь: при $a \in (-\infty; -7) \cup (-7; 4) \cup (4; +\infty)$ система має єдиний розв'язок;

при $a = -7$ система не має розв'язків;

при $a = 4$ система має безліч розв'язків.

Задачі для самостійної роботи.

19. Знайти кількість розв'язків системи в залежності від значень параметра a

19.1. $\begin{cases} (a-2)x + 6y = 15 \\ 3x + (2a-4)y = 15 \end{cases}$

19.2. $\begin{cases} 2x + (a-4)y = 16 \\ (4-a)x - 50y = 80 \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} (2a-3)x - ay = 3a-2 \\ 5x - (2a+3)y = 5 \end{cases}$

19.4. $\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4{,}5 \\ 2x + (a+1)y = -1 \end{cases}$

19.5. $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1 \end{cases}$

19.6. $\begin{cases} (a - 3)x + 4y = 5 - 3a \\ 2x + (2 - a)y = 4 \end{cases}$

19.7. $\begin{cases} ax + (a - 1)y = 3a \\ 3(a + 2)x + (3a - 1)y = a + 5 \end{cases}$

19.8. $\begin{cases} 3x + y = a \\ 2ax - 2y = a + 5 \end{cases}$

19.9. $\begin{cases} a^2x + (a - 2)y = a^3 + 6 \\ ax - (a - 1)y = a^2 \end{cases}$

19.10. $\begin{cases} (a + 3)x + (4a - 3)y = 3 \\ 3x + (a + 1)y = 10 - a \end{cases}$

19.11. $\begin{cases} (2a + 1)x + (a - 2)y = a \\ (2a - 3)x + (a + 1)y = 4a \end{cases}$

19.12. $\begin{cases} 7x + ay = 2a - 2 \\ (a + 3)x + (2a - 1)y = 3a - 15 \end{cases}$

19.13. $\begin{cases} (a - 3)x + 15y = 9 \\ ax + (1 - a)y = -a \end{cases}$

19.14. $\begin{cases} (a + 4)x + (a - 3)y = 7a + 6 \\ 2ax - y = a^3 \end{cases}$

19.15. $\begin{cases} (a - 1)x + y = 2a - 3 \\ (a - 3)x + ay = -7 \end{cases}$

19.16. $\begin{cases} 2x + (2a^2 - 12a + 8)y = 3 \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12 \end{cases}$

19.17. $\begin{cases} 6x + 2y = 5a \\ (5a - 3)x + ay = 2 \end{cases}$

19.18. $\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ 2x + (a + 1)y = a^2 + 1 \end{cases}$

19.19. $\begin{cases} (a - 3)x - 4y = 3a - 5 \\ ax + (a - 2)y = 3 \end{cases}$

19.20. $\begin{cases} (3a + 13)x - 14y = 2a^2 + 5a + 7 \\ 5x - 7y = 2 \end{cases}$

20. Приклади задач із варіантів ЗНО

Задача 1 (2007 рік). Розв'яжіть нерівність

$$\left(x^2 - 2\sqrt{a}x + 1\right)(2^x + \lg a) < 0$$

Розв'язання. Враховуючи ОДЗ на параметр, одразу зауважимо, що при $a \leq 0$ нерівність не має розв'язків. Тому далі розглядатимемо тільки значення $a > 0$.

Задана нерівність може бути правильною в одному з двох випадків

$$\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{a}x + 1 < 0 \\ 2^x + \lg a > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 - 2\sqrt{a}x + 1 > 0 \\ 2^x + \lg a < 0 \end{cases}$$

Розглянемо перший випадок.

$$\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{a}x + 1 < 0 \\ 2^x + \lg a > 0 \end{cases}$$

Перша нерівність є квадратною (докладне розв'язання квадратних нерівностей розглянуто в розділі 6). Для її розв'язання знайдемо дискримінант відповідного квадратного рівняння: $D = 4a - 4$.

Враховуючи, що коефіцієнт при x^2 не залежить від параметра і є додатнім, для того, щоб ця нерівність мала розв'язки, має виконуватись умова $D > 0$, звідки $a > 1$. Тому для значень параметра $0 < a \leq 1$ перша нерівність системи, а отже і сама система, не матимуть розв'язків. Тому далі в цьому випадку будемо розглядати тільки значення параметра $a > 1$.

В цьому випадку корені відповідного рівняння матимуть вигляд

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{a} \pm 2\sqrt{a-1}}{2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{a-1}$$

А множина розв'язків першої нерівності матиме вигляд

$$(\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1})$$

Перейдемо до розв'язання другої нерівності системи.

$$2^x > -\lg a$$

Враховуючи отримане раніше обмеження $a > 1$, отримаємо, що $\lg a > 0$, а отже, $-\lg a < 0$. Тоді нерівність $2^x > -\lg a$ є правильною при будь-якому значенні змінної x.

Докладно про розв'язання показникових нерівностей можна подивитись в розділі 14.

Отже, остаточним розв'язком системи в першому випадку при $a > 1$ є множина $x \in (\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1})$, при інших значеннях параметра розв'язків немає.

Розглянемо другий випадок.

$$\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{a}x + 1 > 0 \\ 2^x + \lg a < 0 \end{cases}$$

Почнемо з другої нерівності, тому що при деяких значеннях параметра вона, а отже і вся система, не матимуть розв'язків.

$$2^x + \lg a < 0$$

$$2^x < -\lg a$$

Остання нерівність матиме розв'язок за умови $-\lg a > 0$ або $\lg a < 0$, звідки виникає умова на параметр $0 < a < 1$, за якої нерівність матиме розв'язок. Сам розв'язок матиме вигляд

$$x < \log_2(-\lg a)$$

або, після застосування властивості логарифма перетвориться на

$$x < \log_2\left(\lg\frac{1}{a}\right)$$

Щодо першої нерівності системи, то у першому випадку було з'ясовано, що при значеннях параметра $0 < a < 1$ дискримінант відповідного рівняння буде від'ємним, а оскільки коефіцієнт при x^2 більше нуля, то розв'язком нерівності буде множина всіх значень змінної.

Отже, розв'язком системи в другому випадку буде $x \in \left(-\infty; \log_2\left(\lg\frac{1}{a}\right)\right)$ при $0 < a < 1$, а при інших значення параметра розв'язки відсутні.

Відповідь: при $a \leq 0$ і $a = 1$ розв'язків немає;

при $0 < a < 1$ $x \in \left(-\infty; \log_2\left(\lg\frac{1}{a}\right)\right)$;

при $a > 1$ $x \in (\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1})$.

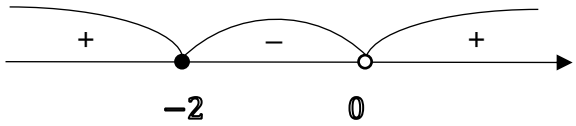
Головною ідеєю розглянутої задачі було перетворення вихідної нерівності на сукупність двох систем. Аналогічна ідея використовується при розв'язанні задачі, що була присутня в 2018 році.

Задача 2 (2019 рік, додаткова сесія). Визначте всі розв'язки системи залежно від значень параметра a

$$\begin{cases} \dfrac{3x+6}{x} \le 0 \\ \log_{\frac{a}{2}}(x-a+2)^2 \ge 2\log_{\frac{a}{2}}(a-1) \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку окремо першу нерівність системи, використовуючи метод інтервалів. Докладно про використання методу інтервалів можна дізнатись з відповідного додатку.

Нулі чисельника та знаменника $x = -2$ та $x = 0$ відповідно, нанесемо їх на числову пряму, при переході через кожне таке значення відбудеться чергування знаку дробу. Знак на крайньому правому проміжку буде плюс, як комбінація знаків коефіцієнтів при змінній x в чисельнику та знаменнику. Схематичне зображення зміни знаків відображено на наступному рисунку.



Отже, розв'язок першої нерівності матиме вигляд $x \in [-2; 0)$.

Для другої нерівності врахуємо спочатку всі наявні обмеження щодо існування виразів (знайдемо ОДЗ).

$$\begin{cases} \frac{a}{2} > 0 \\ \frac{a}{2} \ne 1 \\ a-1 > 0 \\ x-a+2 \ne 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} a > 1 \\ a \ne 2 \\ x-a+2 \ne 0 \end{cases}$$

За властивістю логарифмів вказану нерівність можна перетворити на

$$\log_{\frac{a}{2}}(x-a+2)^2 \ge \log_{\frac{a}{2}}(a-1)^2$$

Далі треба буде розглядати два випадки, які однозначно визначають монотонність логарифмічної функції.

1) Якщо $\frac{a}{2} > 1$, тобто $a > 2$, то логарифмічна функція зростає і можна переходити від логарифмічної нерівності до нерівності квадратної.

$$(x - a + 2)^2 \geq (a - 1)^2$$

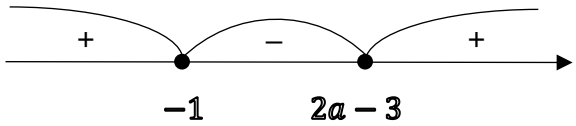
В отриманій нерівності зручно застосувати розкладання на множники, використовуючи формулу різниці квадратів

$$(x - a + 2)^2 - (a - 1)^2 \geq 0$$

$$(x - a + 2 - a + 1)(x - a + 2 + a - 1) \geq 0$$

$$(x - 2a + 3)(x + 1) \geq 0$$

Далі скористаємось методом інтервалів. Нулями добутку будуть $x = -1$ та $x = 2a - 3$. Враховуючи, що у даному випадку розглядаємо значення параметра $a > 2$, для таких значень параметра маємо $2a - 3 > 1$, отже можемо однозначно розташувати нулі на числовій прямій. В кожному з них буде відбуватись зміна знаку добутку, знак на крайньому правому проміжку буде додатнім. Схематичне зображення наводиться далі.



Для того щоб врахувати ОДЗ, треба розташувати на числовій прямій значення $x = a - 2$. Це знову можна однозначно зробити, враховуючи умову, що $a > 2$, оскільки тоді $2a - 3 > a - 2$ та $a - 2 > -1$. Отже, значення $x = a - 2$ потрапить на проміжок, де функція від'ємна, таким чином обмеження в ОДЗ буде виконано автоматично.

Отже, розв'язок другої нерівності має вигляд $x \in (-\infty; -1] \cup [2a - 3; \infty)$ при $a > 2$.

Залишилось знайти спільну частину для множини розв'язків першої та другої нерівності. Враховуючи, що при $a > 2$ правильним є $2a - 3 > 0$, спільна частина отриманих множин визначається однозначно і має наступний вигляд $x \in [-2; -1]$ при $a > 2$.

2) Нехай тепер $0 < \frac{a}{2} < 1$, тоді, враховуючи ОДЗ на параметр маємо загальне обмеження $1 < a < 2$. В цьому випадку при переході від логарифмічної нерівності до квадратної потрібно змінити знак

$$(x - a + 2)^2 \leq (a - 1)^2$$

Відповідно після перетворень матимемо

$$(x - 2a + 3)(x + 1) \leq 0$$

Знову нулями добутку будуть $x = -1$, $x = 2a - 3$, та знову їх розташування на числовій прямій є однозначним, оскільки з умови $a > 1$ випливає, що $2a - 3 > -1$, отже і розташування на нулів на числовій прямій і чергування знаків збігаються з попереднім випадком. Але, враховуючи зміну знаку нерівності, множина розв'язків квадратної нерівності матиме наступний вигляд $x \in [-1; 2a - 3]$.

Залишилось врахувати ОДЗ. Значення $x = a - 2$ треба порівняти зі значеннями $x = -1$ та $x = 2a - 3$. За умови, що $a > 1$, маємо $2a - 3 > a - 2$ та $a - 2 > -1$. Отже, значення $x = a - 2$ треба виключити з множини розв'язків квадратної нерівності, щоб отримати множину розв'язків другої нерівності системи. Отже, розв'язок другої нерівності при $1 < a < 2$ має наступний вигляд $x \in [-1; a - 2) \cup (a - 2; 2a - 3]$.

Для пошуку спільної частини для множин розв'язків першої та другої системи $[-2; 0)$ та $[-1; a - 2) \cup (a - 2; 2a - 3]$ при $1 < a < 2$ зауважимо, що з умови $1 < a < 2$ випливає, що $-1 < a - 2 < 0$, але для порівняння $2a - 3$ з 0 доведеться розглядати ще два випадки.

Якщо $\begin{cases} 1 < a < 2 \\ 2a - 3 \geq 0 \end{cases}$, тобто $1{,}5 \leq a < 2$, то множина розв'язків системи матиме вигляд $x \in [-1; a - 2) \cup (a - 2; 0)$.

Якщо $\begin{cases} 1 < a < 2 \\ 2a - 3 < 0 \end{cases}$, тобто $1 < a < 1{,}5$, то множина розв'язків системи матиме вигляд $x \in [-1; a - 2) \cup (a - 2; 2a - 3]$.

Відповідь: при $a \leq 1$ розв'язків немає;

при $1 < a < 1{,}5$ $x \in [-1; a - 2) \cup (a - 2; 2a - 3]$;

при $1{,}5 \le a < 2$ $x \in [-1; a-2) \cup (a-2; 0)$;

при $a > 2$ $x \in [-2; -1]$.

Задача 3 (2012 рік, 2 сесія). При якому найменшому значення a рівняння

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + (14-2a)\sqrt[4]{x-3} + 32 = 6a$$

має хоча б один корінь?

Розв'язання. Виконаємо наступне перетворення

$$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = \sqrt{(x-3)+2\sqrt{x-3}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2} = \left|\sqrt{x-3}+1\right|$$

Враховуючи, що в отриманому виразі модуль знаходиться від додатної величини, його можна випустити, тоді, з урахуванням зробленого перетворення, задане рівняння перетвориться на

$$\sqrt{x-3} + 1 + (14-2a)\sqrt[4]{x-3} + 32 = 6a$$

Виконаємо заміну змінних $\sqrt[4]{x-3} = t$, де $t \ge 0$, тоді $\sqrt{x-3} = t^2$ і рівняння відносно змінної t матиме вигляд

$$t^2 + (14-2a)t + 33 - 6a = 0$$

Якщо останнє квадратне рівняння має хоча б один невід'ємний розв'язок, то вихідне рівняння також матиме хоча б один корінь.

Дискримінант отриманого рівняння має вигляд

$$D = (14-2a)^2 - 4(33-6a) = 4a^2 - 32a + 64 = 4(a-4)^2$$

Оскільки для будь-якого значення параметра $D \ge 0$, то корені рівняння завжди існують і мають вигляд

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-(14-2a)+2(a-4)}{2} = 2a-11 \\ t_2 = \dfrac{-(14-2a)-2(a-4)}{2} = -3 \end{array}\right.$$

Для того, щоб рівняння мало невід'ємні корені, потрібно, щоб $t_1 \ge 0$, тобто $2a - 11 \ge 0$, звідки $a \ge 5{,}5$, тому найменше можливе значення $a = 5{,}5$.

Відповідь: $a = 5{,}5$.

Задача 4 (2016 рік). Розв'яжіть рівняння

$$\frac{\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}}{5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x}=0$$

залежно від значень параметра a.

Розв'язання. Задане рівняння рівносильно системі

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}=0\\ 5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x\neq 0\end{cases}$$

Розглянемо окремо кожну з умов системи. Перше рівняння одразу дає обмеження на значення параметра, оскільки при $a<0$ рівняння не має сенсу. Отже, далі будемо розглядати тільки значення параметра $a\geq 0$.

Перепишемо перше рівняння в зручному вигляді та виконаємо піднесення обох частин рівняння до квадрату, що можна зробити без обмежень у випадку невід'ємності обох частин рівняння.

$$\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}=2\sqrt{2a}$$

$$x^2+(4a-4)x+4a^2=8a$$

Зауважимо, що оскільки розглядаються $a\geq 0$, то за умови виконання останньої рівності і $x^2+(4a-4)x+4a^2\geq 0$, тому обмеження на існування виразу $\sqrt{x^2+(4a+4)x+4a^2}$ виконується автоматично.

Отримали квадратне рівняння

$$x^2+(4a-4)x+4a^2-8a=0$$

для якого дискримінант має вигляд

$$D=(4a-4)^2-4(4a^2-8a)=16$$

корені рівняння мають вигляд

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-4a+4+4}{2}=4-2a\\ x=\dfrac{-4a+4-4}{2}=-2a\end{array}\right.$$

Перейдемо до розв'язання другої умови системи, яку будемо розв'язувати як рівняння, і в результаті знайдемо вираз, якому не може дорівнювати змінна.

Виконаємо ланцюг перетворень, метою якого є розкладання лівої частини на множники.

$$5^{x+1} \cdot 5^x - 5^{x+1} \cdot 5^{a-1} + 5^x - 5^{a-1} \neq 0$$

$$5^{x+1}(5^x - 5^{a-1}) + 5^x - 5^{a-1} \neq 0$$

$$(5^x - 5^{a-1})(5^{x+1} + 1) \neq 0$$

Оскільки $5^{x+1} + 1 > 0$ при будь-якому значенні змінної x, то відповідний множник не може вплинути на рівність нулю, тому залишилось вимагати, щоб

$$5^x - 5^{a-1} \neq 0$$

$$5^x \neq 5^{a-1}$$

$$x \neq a - 1$$

Залишилось поєднати отримані результати. Для кожного з двох отриманих розв'язків розглянемо систему, яка містить сам розв'язок і всі знайдені обмеження.

Для першого розв'язку відповідна система матиме вигляд

$$\begin{cases} x = 4 - 2a \\ a \geq 0 \\ x \neq a - 1 \end{cases} \begin{cases} x = 4 - 2a \\ a \geq 0 \\ 4 - 2a \neq a - 1 \end{cases} \begin{cases} x = 4 - 2a \\ a \geq 0 \\ a \neq \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Для другого розв'язку аналогічна система матиме вигляд

$$\begin{cases} x = -2a \\ a \geq 0 \\ x \neq a - 1 \end{cases} \begin{cases} x = -2a \\ a \geq 0 \\ -2a \neq a - 1 \end{cases} \begin{cases} x = -2a \\ a \geq 0 \\ a \neq \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Комбінуючи умови на існування кожного розв'язку, отримаємо остаточну відповідь.

Відповідь: при $a \in (-\infty; 0)$ розв'язків немає;

при $a = \frac{1}{3}$ $\quad x = 4 - 2a = 3\frac{1}{3}$;

при $a = \frac{5}{3}$ $\quad x = -2a = -3\frac{1}{3}$;

при $a \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; \infty\right)$ $x = 4 - 2a$ та $x = -2a$.

Задача 5 (2017 рік). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} |x - y| = |x - a| \\ \lg(y - a) = \lg(4a^2 + x - x^2) \end{cases}$$

залежно від значень параметра a.

Розв'язання. Виконаємо перетворення кожного з рівнянь системи, що призведе до появи двох простіших систем.

В першому рівнянні замість рівності модулів можна розглянути два випадки: коли вирази, що стоять під знаком модуля мають однакові або різні знаки. Іншими словами, перше рівняння рівносильно сукупності двох наступних рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x-y=x-a \\ x-y=-(x-a) \end{array}\right.$$

В другому рівнянні рівність логарифмів рівносильна рівності їх аргументів за умови врахування обмежень на існування логарифмів. Тобто друге рівняння рівносильно системі

$$\begin{cases} y-a=4a^2+x-x^2 \\ y-a>0 \end{cases}$$

Зауважимо, що для тих значень змінних, для яких виконується остання система, умова $4a^2+x-x^2>0$ буде виконуватись автоматично.

Отже, вихідна система перетвориться на сукупність двох систем

$$\begin{cases} x-y=x-a \\ y-a=4a^2+x-x^2 \\ y-a>0 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x-y=-(x-a) \\ y-a=4a^2+x-x^2 \\ y-a>0 \end{cases}$$

Перша з отриманих систем не матиме розв'язків, оскільки перша умова після спрощення перетвориться на $y=a$, що суперечить третій умові $y>a$.

Тому одразу перейдемо до розв'язання другої системи. З першого рівняння виразимо змінну y та підставимо відповідний вираз в другу та третю умови системи.

$$\begin{cases} y=2x-a \\ 2x-2a=4a^2+x-x^2 \\ 2x-2a>0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-a \\ x^2+x-(4a^2+2a)=0 \\ x>a \end{cases}$$

(124)

Розв'яжемо квадратне рівняння

$$x^2+x-(4a^2+2a)=0$$

Його дискримінант має вигляд

$$D = 1 + 4(4a^2 + 2a) = (4a + 1)^2$$

Корені мають вигляд

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 + 4a + 1}{2} = 2a \\ x = \dfrac{-1 - 4a - 1}{2} = -1 - 2a \end{array}\right.$$

Підставимо знайдені корені в систему (124).

Для першого кореня маємо

$$\begin{cases} y = 2 \cdot 2a - a \\ x = 2a \\ 2a > a \end{cases} \begin{cases} y = 3a \\ x = 2a \\ a > 0 \end{cases}$$

Для другого кореня маємо

$$\begin{cases} y = 2(-1 - 2a) - a \\ x = -1 - 2a \\ -1 - 2a > a \end{cases} \begin{cases} y = -2 - 5a \\ x = -1 - 2a \\ a < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Комбінуючи отримані результати відносно значень параметра, отримаємо остаточну відповідь.

Відповідь: при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ $x = -1 - 2a$, $y = -2 - 5a$;

при $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$ розв'язків немає;

при $a \in (0; \infty)$ $x = 2a$, $y = 3a$.

Задача 6 (2021 рік). Задано систему рівнянь

$$\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8 \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1 \end{cases}$$

де x, y – змінні, a – довільна стала. Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a.

Розв'язання. Виконаємо підстановку виразу $2 \cdot 4^{\sqrt{y}}$ з другого рівняння в перше, попередньо виконавши необхідні перетворення.

$$\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 8 \\ 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1 - x \end{cases} \begin{cases} ax^2 + 3ax + 2(1 - x) = 8 \\ 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1 - x \end{cases}$$

Перше рівняння системи є квадратним і після спрощення матиме вигляд

$$ax^2 + (3a - 2)x - 6 = 0 \qquad (15)$$

Його дискримінант має вигляд

$$D = (3a - 2)^2 + 24a = (3a + 2)^2$$

Корені мають вигляд

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2 - 3a + 3a + 2}{2a} = \dfrac{2}{a} \\ x = \dfrac{2 - 3a - (3a + 2)}{2a} = -3 \end{array}\right.$$

Залишилось для кожного значення змінної x знайти відповідне значення змінної y, користуючись другим рівнянням системи.

Для першого значення змінної x отримаємо систему

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{a} \\ 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1 - \dfrac{2}{a} \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{2}{a} \\ 4^{\sqrt{y}} = \dfrac{a - 2}{2a} \end{cases}$$

В другому рівнянні ліва частина є додатною при будь-якому значенні змінної y, отже, щоб рівність була можливою, необхідно виконання наступної умови $\frac{a-2}{2a} > 0$.

Тоді система перетвориться на

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{a} \\ \sqrt{y} = \log_4 \dfrac{a - 2}{2a} \\ \dfrac{a - 2}{2a} > 0 \end{cases}$$

Для того, щоб остаточно знайти значення змінної y, треба додатково вимагати, щоб $\log_4 \frac{a-2}{2a} \geq 0$, тоді система перетвориться на

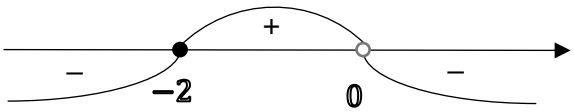
$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{a} \\ y = \log_4^2 \dfrac{a - 2}{2a} \\ \dfrac{a - 2}{2a} > 0 \\ \log_4 \dfrac{a - 2}{2a} \geq 0 \end{cases}$$

Розглянемо окремо систему для умов на параметр

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{2a} > 0 \\ \log_4 \dfrac{a-2}{2a} \geq 0 \end{cases}$$

При розв'язанні логарифмічної нерівності вона перетвориться на нерівність $\frac{a-2}{2a} \geq 1$ (докладно про розв'язання логарифмічних нерівностей можна подивитись в розділі 16). Тобто, якщо вимагати виконання останньої нерівності, то перша нерівність системи виконується автоматично. Тому остання система рівносильна нерівності $\frac{a-2}{2a} \geq 1$, яка після перетворення набуває наступного вигляду $\frac{-2-a}{2a} \geq 0$.

Застосовуючи метод інтервалів маємо наступне схематичне зображення (докладно про застосування методу інтервалів дивись у відповідному додатку)



Отже, для першого розв'язку квадратного рівняння (15) остаточний розв'язок системи при $a \in [-2; 0)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{a} \\ y = \log_4^2 \dfrac{a-2}{2a} \end{cases}$$

Для другого розв'язку рівняння (15) отримаємо систему

$$\begin{cases} x = -3 \\ 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1 + 3 \end{cases} \begin{cases} x = -3 \\ 2^{2\sqrt{y}} = 2 \end{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Отриманий розв'язок є вірним при будь-яких значеннях параметра.

Комбінуючи отримані розв'язки при всіх значеннях параметра, отримаємо остаточний результат.

Відповідь: при $a \in [-2; 0)$ $x = \frac{2}{a}$, $y = \log_4^2 \frac{a-2}{2a}$ або $x = -3$, $y = \frac{1}{4}$;

при $a \in (-\infty; -2) \cup [0; \infty)$ $x = -3$, $y = \frac{1}{4}$.

Задача 7 (2023 рік, демонстраційний мультитест). Визначте найменше ціле значення параметра а, за якого один із коренів рівняння

$$\log_2^2 x - (a-1)\log_2 x - a = 0$$

належить проміжку $(30; 100)$.

Розв'язання. За допомогою заміни змінних $t = \log_2 x$ зведемо задане рівняння до квадратного

$$t^2 - (a-1)t - a = 0$$

Дискримінант отриманого рівняння має вигляд

$$D = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2$$

Корені рівняння мають вигляд

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a-1+a+1}{2} = a \\ x = \dfrac{a-1-(a+1)}{2} = -1 \end{array}\right.$$

Повертаючись до змінної x, отримаємо сукупність двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = a \\ \log_2 x = -1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2^a \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Обидва рівняння мають розв'язок при будь-якому значенні параметра. Отже, вихідне рівняння має два корені. Корінь $x = \frac{1}{2}$ не належить проміжку $(30; 100)$, тому потрібно, щоб корінь $x = 2^a$ задовольняв відповідну умову, тобто вимагаємо виконання умов

$$30 < 2^a < 100$$

Оскільки нас цікавить найменше ціле значення параметра a, що задовольняє отриману умову, то за допомогою перебору легко впевнитись, що при $a = 4$ умова не виконується, оскільки $2^4 < 30$, а при $a = 5$ умова виконується, оскільки $30 < 2^5 < 100$.

Відповідь: $a = 5$.

21. Додаток. Метод інтервалів для раціональних нерівностей

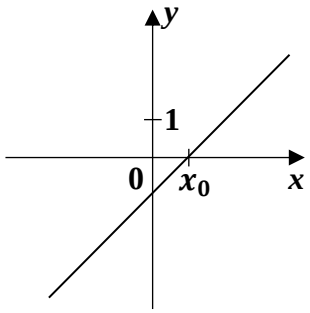
Головна задача методу інтервалів полягає в автоматичній комбінації знаків декількох виразів з метою встановлення знаку їх добутку або частки для кожного значення змінної, що входить у відповідні вирази.

Для того, щоб зрозуміти загальний механізм роботи методу інтервалів та сформулювати алгоритм його дії, наведемо декілька допоміжних міркувань.

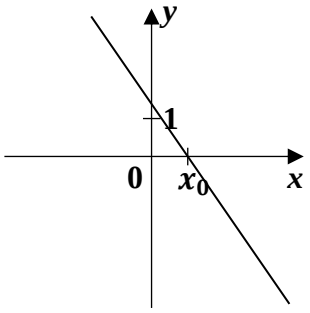
Розглянемо лінійну функцію $y = kx + b,\ k \neq 0$. Будемо порівнювати значення цієї функції з нулем, для чого виконаємо схематичне зображення графіка лінійної функції. Позначимо через x_0 нуль функції, тобто абсцису точки перетину графіка з віссю Ox.

Одразу зауважимо важливу для подальшого алгоритму особливість: в залежності від знаку k (коефіцієнта при змінній x) маємо два різних схематичних зображення графіка лінійної функції.

1) При $k > 0$ функція зростає



2) При $k < 0$ функція спадає



Користуючись графіками, зробимо наступні висновки.

1) Графіки перетинають вісь Ox в єдиній точці x_0, яка розбиває значення змінної x на два проміжки $(-\infty; x_0)$ та $(x_0; +\infty)$.

Проміжок $(x_0; +\infty)$, в позначенні якого присутній символ $+\infty$ далі будемо називати *крайнім правим проміжком* серед тих, на які розбита числова пряма деякими точками.

2) Знак функції для значень змінної $x \in (x_0; +\infty)$ виявляється більше нуля ($y > 0$) при $k > 0$ та меншим нуля ($y < 0$) при $k < 0$.

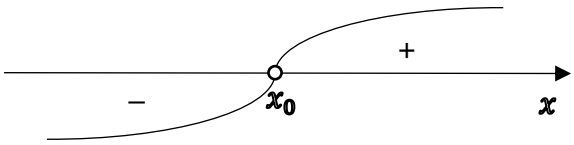
   Отже, можна сказати, що знак функції для тих значень змінної, що береться з крайнього правого проміжку збігається зі знаком коефіцієнта при змінній x.

3) Знак функції для значень змінної $x \in (-\infty; x_0)$ в обох випадках відрізняється від того, який мала функція для значень $x \in (x_0; +\infty)$.

   Отже, можна сказати, що здійснюючи рух числовою прямою (віссю Ox) справа наліво, в момент переходу через точку x_0 ми переходимо з одного числового проміжку в інший, і при цьому функція змінює знак.

Для наочної фіксації отриманих знаків будемо використовувати схематичне зображення, що містить проміжки, на які розбита вісь Ox та вказаний знак функції, який вона має на кожному такому проміжку. Також зручно використовувати хвилясту лінію, яка є неперервною, проходить через нулі функції та знаходиться вище числової прямої (осі Ox) на тому проміжку, де функція набуває додатніх значень або нижче числової прямої на тому проміжку, де значення функції є від'ємним.

Наприклад, наступний рисунок схематично зображує, що функція на проміжку $(x_0; +\infty)$ має додатні значення, а на проміжку $(-\infty; x_0)$ має від'ємні

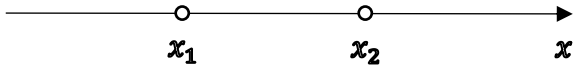


значення.

Розглянемо тепер вираз $(k_1x + b_1) \cdot (k_2x + b_2)$ і поставимо задачу порівняти цей вираз з нулем. Очевидно, що на знак добутку впливає комбінація знаків обох множників. Кожен з множників є лінійною функцією $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, тому на них поширюються всі отримані раніше висновки.

Отже, якщо позначити нулі цих функцій відповідно через x_1 та x_2, то на кожному з проміжків $(-\infty; x_1)$ та $(x_1; +\infty)$ можна однозначно встановити знак виразу $(k_1x + b_1)$, а на кожному з проміжків $(-\infty; x_2)$ та $(x_2; +\infty)$ можна однозначно встановити знак виразу $(k_2x + b_2)$. Але нас цікавить комбінація цих знаків, яка і дозволить визначити знак добутку. Для цього треба розбити числову пряму на такі проміжки, на яких однозначно визначатимуться знаки обох множників.

Розглянемо, спочатку ситуацію, коли $x_1 \neq x_2$ (нехай для зручності $x_1 < x_2$). Нанесемо ці значення на числову пряму.



Визначимо знак добутку $(k_1x + b_1) \cdot (k_2x + b_2)$ для $x \in (x_2; +\infty)$, тобто для значень з крайнього правого проміжку. Для виразу $(k_2x + b_2)$ цей знак збігається зв знаком k_2 за наведеними раніше міркуваннями, але і для виразу $(k_1x + b_1)$ на цьому проміжку знак також збігається зі знаком свого коефіцієнта k_1, оскільки відповідний знак буде мати місце для всіх значень змінної $x > x_1$, в тому числі і для значень $x > x_2$.

Отже, знак добутку $(k_1x + b_1) \cdot (k_2x + b_2)$ на крайньому правому проміжку $(x_2; +\infty)$ буде комбінацією знаків коефіцієнтів k_1 та k_2.

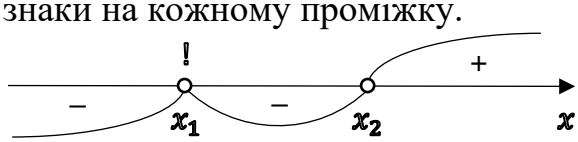
Почнемо тепер рухатись справа наліво уздовж числової прямої. При переході через точку x_2 ми потрапляємо у проміжок $(x_1; x_2)$ при цьому знак множника $(k_2x + b_2)$ змінюється, а знак множника $(k_1x + b_1)$ залишається незмінним, оскільки ми ще не перетинали точку x_1. Тому добуток на цьому проміжку змінить знак.

Аналогічна ситуація відбувається при подальшому русі вліво, перетині точки x_1 і переході до проміжку $(-\infty; x_1)$. При переході через точку x_1 множник $(k_1x + b_1)$ змінює знак, а знак множника $(k_2x + b_2)$ залишається без зміни для всіх $x < x_2$, в тому числі і на проміжку $(-\infty; x_1)$. Тому добуток знову змінює знак.

Якщо множників стає більше $(k_1x + b_1) \cdot (k_2x + b_2) \cdot \ldots \cdot (k_nx + b_n)$ і вони дорівнюють нулю в різних точках $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, то, за аналогічними міркуваннями, на крайньому правому проміжку знак добутку визначається комбінацією знаків коефіцієнтів $k_1, k_2, \ldots, k_n$, а далі при русі справа наліво при переході через точки $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$ кожного разу відбувається зміна знаку.

Розглянемо тепер ситуацію, коли серед значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є однакові. Відмінність від попереднього випадку полягає в тому, що при переході через таку точку одночасно декілька множників змінюють знак. І якщо таких множників буде парна кількість, то їх добуток не буде змінювати знак, тобто чергування знаків в таких точках не відбувається. Для зручності на схематичному зображенні такі точки можна виділити деяким символом, наприклад, знаком оклику. Приклад показано на рисунку.

Тоді, якщо чергування знаків для цього прикладу почнеться зі знаку плюс, то отримаємо наступні знаки на кожному проміжку.



Якщо ж в деякій точці змінює знак одночасно непарна кількість множників, то добуток буде змінювати знак, отже, чергування знаків відбудеться як і в звичайній ситуації, тому виділяти таку точку жодним чином не потрібно.

Зауважимо, що наявність множника $(kx + b)^n$ рівносильна появі n разів множника $(kx + b)$, тобто нуль такого множника буде брати участь в зміні знаку n разів, а отже, при парному n чергування знаку не відбуватиметься. До того ж на знак крайнього правого проміжку коефіцієнт k також впливатиме n разів.

Припустимо тепер, що серед множників, що впливають на загальний знак, з'явиться вираз виду $(ax^2 + bx + c)$. В цьому випадку треба згадати, що графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола. Розглянемо три випадки її розташування щодо перетину з віссю Ox.

1) Якщо дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ більше нуля. Тоді функція має два нулі, в кожному з яких множник $(ax^2 + bx + c)$ буде змінювати знак, а знак на крайньому правому проміжку для такого множника визначається напрямом гілок параболи, тобто збігається зі знаком коефіцієнта a при x^2.

Цей випадок може бути зведений до попереднього, якщо застосувати формулу розкладання квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

З формули видно, що чергування знаків відбуватиметься в точках x_1 та x_2, а знак крайнього правого проміжку – це знак добутку числа a та коефіцієнтів при змінній x в дужках, які завжди дорівнюють 1.

2) Якщо дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює нулю. Тоді парабола дотикається осі Ox, отже функція не буде змінювати знак, який збігається зі знаком коефіцієнта a, але існує єдина точка, в якій відповідний вираз дорівнює нулю.

Цей випадок також можна звести до попереднього. Якщо подати функцію у вигляді $y = a(x - x_0)^2$, де x_0 – корінь рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ у випадку, коли $D = 0$.

3) Якщо дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ менше нуля. В цьому випадку парабола не має спільних точок з віссю Ox, отже буде мати фіксований знак, який збігається зі знаком коефіцієнта a.

Якщо серед множників, які впливають на знак виразу є многочлени степеня більшого ніж другий, то їх завжди можна розкласти на декілька множників виду $(kx + b)$ та (або) виду $(ax^2 + bx + c)$ для визначення окремого впливу кожного з них на знак загального виразу, що досліджується.

Наостанок залишилось звернути увагу, що при розбитті числової прямої на проміжки самі точки, що утворили розбиття, будуть включатись в множину розв’язків, якщо нерівність є нестрогою (рівність нулю дозволяється) та не будуть включатись в множину розв’язків, якщо нерівність строга.

Якщо перед нами стоїть задача порівняння з нулем виразу, в якому присутні як добуток так і частка розглянутих виразів, то вплив на загальний знак при діленні залишиться таким самим, як і при множенні. Єдиною відмінністю буде поява обмежень на область визначення функції (ОДЗ), що приведе до виключення точок, які є нулями знаменника з множини розв'язків при будь-якому строгому або нестрогому знаку нерівності.

На основі наведених фактів сформулюємо алгоритм, який, власне, і має назву методу інтервалів.

Алгоритм застосування методу інтервалів для раціональних функцій

1) Знайти нулі чисельника та знаменника (за його наявності).
2) Зобразити нулі чисельника та знаменника на числовій прямій. При цьому враховуємо, що нулі знаменника завжди зображуються виключеними точками, а нулі чисельника включаються у випадку нестрогої нерівності та виключаються при строгій нерівності.
3) Якщо деяке число буде нулем чисельника та знаменника парну кількість разів, то його треба відмітити деякою позначкою (наприклад, знаком оклику), вказавши таким чином, що у відповідній точці не буде відбуватись зміна знаку.
4) Визначити знаки кожного множника на крайньому правому проміжку з тих, що утворились на числовій прямій. Такий знак буде збігатись зі знаком коефіцієнта при старшому степені змінної у відповідному множнику.
5) Скомбінувавши знаки всіх множників, отримати загальний знак виразу на крайньому правому проміжку.
6) Рухаючись справа наліво, розставити знаки на інших проміжках, змінюючи попередній знак при переході через кожен нуль, що не має спеціальної позначки (знаку оклику) або залишаючи попередній знак при переході через відмічений (знаком оклику) нуль.

Сформувати відповідь у вигляді множини, що об'єднує всі проміжки, знак виразу на яких відповідає заданому знаку нерівності.

22. Додаток. Про побудову графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

Перш ніж навести алгоритм, який використовується для побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень, наведемо деякі допоміжні факти.

Зі шкільного курсу математики відомі елементарні функції та їх графіки. Далі для зручності будемо казати, що при побудові графіків за допомогою геометричних перетворень такі *функції є базовими* або реалізують *базову операцію*, що утворює функцію. Наведемо далі тільки ті елементарні функції, що вивчаються в курсі математики середньої школи, оскільки, саме вони найчастіше зустрічаються в задачах з параметрами, які потрібно розв'язувати за допомогою графічного методу.

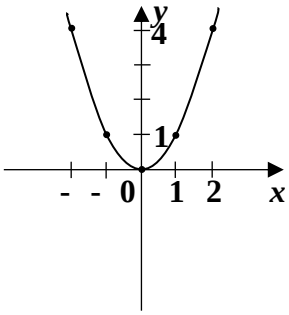
Перелік базових функцій та їх графіки

1) Функція $y = x^2$.

При побудові графіка функції використовуються наступні ключові точки

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4

Графік функції має вигляд

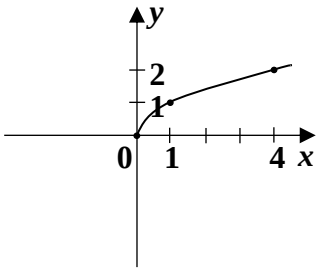


2) Функція $y = \sqrt{x}$.

При побудові графіка функції використовуються наступні ключові точки

x	0	1	4
y	0	1	2

Графік функції має вигляд

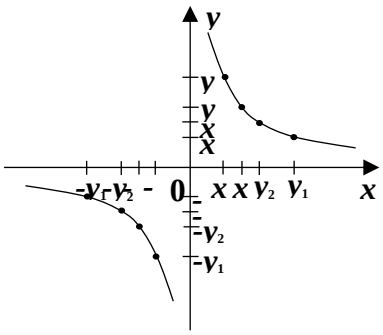


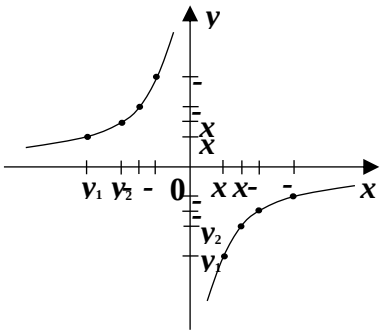
3) Функція $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$ – задане число.

Вибір ключових точок для цієї функції залежить від значення числа k. За можливості в якості абсцис ключових точок обирають дільники числа k. При цьому важливо, щоб разом з кожною ключовою точкою $(x_0; y_0)$ були побудовані також і точки $(y_0; x_0)$, $(-x_0; -y_0)$ та $(-y_0; -x_0)$. Такий вибір точок забезпечить притаманні графіку функції $y = \frac{k}{x}$ симетрії відносно початку координат та відносно прямої $y = x$ (при $k > 0$) або відносно прямої $y = -x$ (при $k < 0$).

Графік функції матиме один з двох виглядів

а) При $k > 0$ б) При $k < 0$





4)

Функція $y = |x|$.

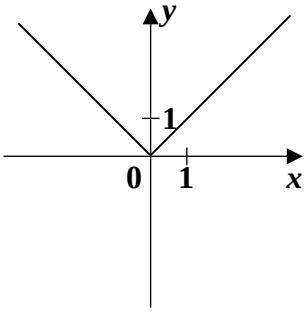
При побудові графіка цієї функції потрібно скористатись означенням модуля та записати функцію у вигляді

$$y = \begin{cases} x, \text{якщо } x \geq 0 \\ -x, \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

Таке представлення функції дає можливість зрозуміти, що її графік складається з двох променів, отриманих з прямих $y = x$ та $y = -x$, побудованих у відповідних півплощинах. Для зображення таких променів достатньо обрати ключові точки

x	0	1	-1
y	0	1	1

Графік функції має вигляд



Перейдемо тепер до переліку додаткових операцій, які можуть бути присутні в функції крім базової, та покажемо, як вони впливають на зміну положення або форми графіка базової функції.

До таких операцій відносяться:

1) додавання заданого додатного числа;
2) віднімання заданого додатного числа;
3) множення або ділення на задане додатне число;
4) множення на (-1), що виконується за потреби зміни знаку;
5) знаходження модуля.

Кожна з перелічених операцій за певним правилом змінює одну з координат всіх ключових точок графіка базової функції. Для того, щоб зрозуміти, яка координата підлягає зміні, треба скористатись наступним правилом: якщо подивитись на функцію як на формулу, яка дає змогу, підставивши значення змінної x обчислити значення змінної y, то при такому обчисленні операції в числовому виразі будуть виконуватись в певному порядку. Всі операції, які таким чином будуть виконуватись раніше базової операції, при геометричному перетворенні графіка будуть впливати на зміну координати x ключових точок (будемо їх називати *перетвореннями по змінній* x). А ті операції, які виконуються після базової операції, призводять до зміни координати y ключових точок (будемо їх називати *перетвореннями по змінній* y).

Залишилось зрозуміти, яким чином кожна з вказаних операцій впливає на зміну відповідної координати. Для цього знову треба буде згадати про порядок виконання операцій. Справа в тому, що якщо базова операція повинна виконуватись не першою (отже потрібні деякі перетворення по змінній x), то будуючи графік базової операції і виконуючи, таким чином, базову операцію першою, ми насправді встановлюємо залежність змінної y не від змінної x, а від деякої іншої змінної, яку для зручності позначимо через t. Нова змінна t є результатом виконання зі змінною x всіх операцій, що передували базовій операції. Наша мета полягає в знаходженні виразу, що допомагає отримати значення змінної x зі значення змінної t, яке нам відомо в якості абсцис ключових точок базової функції.

Розглянемо, як це працює на прикладі однієї з додаткових операцій зі змінною x. Нехай треба побудувати графік функції $y = f(x + a)$, де $a > 0$ та f означає одну з базових операцій. Виконавши побудову графіка базової функції, ми отримаємо залежність $y = f(t)$, де $t = x + a$. Для того, щоб відновити залежність від змінної x, останню рівність треба сприймати як рівняння відносно змінної x, розв'язавши яке, отримаємо $x = t - a$. Тому абсциси всіх ключових точок (що наразі мають значення змінної t) треба зменшити на a, що призведе до зсуву базової функції на a одиниць вліво.

Зауважимо, що при розв'язанні рівняння відносно x, зі змінною t буде виконуватись обернена операція до тієї, яка виконувалась зі змінною x у вихідній функції. Це зауваження можна сформулювати у вигляді *«правила оберненої операції»*: замість всіх операцій, що приводять до перетворення графіка функції по змінній x, при зміні абсцис ключових точок базового графіка до їх значень застосовуються обернені операції.

Окремої додаткової уваги потребують операції множення на (-1) та знаходження модуля по змінній x.

При необхідності побудувати графік функції $y = f(-x)$ додаткова операція встановлює зв'язок $t = -x$, звідки $x = -t$. Отже, і пряма і обернена

операція полягає в множенні на (-1). Це єдине перетворення по змінній x, в якому можна не казати про виконання оберненої операції.

При аналізі додаткової операції знаходження модуля по змінній x навпаки, не очевидно, в чому полягає обернена до знаходження модуля операція. Тому, розглянемо цей випадок докладніше.

Треба побудувати графік функції $y = f(|x|)$. Після побудови базової функції отримаємо графік $y = f(t)$, де $t = |x|$. Залишилось розв'язати останнє рівняння відносно змінної x.

Одразу стає зрозумілим, що для значень $t < 0$ відповідне рівняння не має розв'язків, отже, ті точки графіка $y = f(t)$, що мають від'ємні абсциси, треба відкинути.

Якщо $t \geq 0$, то отримаємо два значення $x = t$ або $x = -t$. Першому випадку відповідають вже побудовані точки графіка $y = f(t)$ з невід'ємними абсцисами, другому – точки, в яких абсциси мають протилежні значення, тобто точки симетричні точкам з першого випадку відносно осі Oy.

Залишилось навести останнє зауваження, що стосується перетворень по змінній x, ілюстрацію якого наведемо на наступному прикладі. Нехай треба побудувати графік функції $y = f(ax + b)$, де $a > 1, b > 0$, а f – деяка базова функція.

Як завжди, починаємо побудову з графіка функції $y = f(t)$, де

$$t = ax + b \tag{15}$$

Розв'яжемо рівняння відносно змінної x

$$x = (t - b) : a \tag{16}$$

Порівняємо порядок операцій в двох останніх виразах. В (15) спочатку виконується операція множення, потім – операція додавання. В (16) спочатку виконується операція віднімання (обернена до додавання), а потім – операція ділення (обернена до множення). Отже, при виконанні перетворень зі змінною x кожна операція (як ми з'ясували раніше) замінюється на обернену і крім того, обернені операції виконуються в зворотному порядку.

При виконанні перетворень графіка, що пов'язані з операціями, які виконуються після базової операції (перетворення по змінній y) відбувається зміна ординат ключових точок шляхом виконання з ними саме тієї операції, яку відображає відповідне перетворення.

В підсумку наведемо зміни графіка, які потрібно виконувати для врахування кожної можливої додаткової операції.

Перетворення по змінній x

1) Додавання заданого додатного числа.

$$y = f(x + a), a > 0$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(x_0 - a; y_0)$.

Графік базової функції $y = f(x)$ зсувається на a одиниць вліво.

2) Віднімання заданого додатного числа.

$$y = f(x - a), a > 0$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(x_0 + a; y_0)$.

Графік базової функції $y = f(x)$ зсувається на a одиниць вправо.

3) Множення на задане додатне число.

$$y = f(ax), a > 0$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $\left(\frac{x_0}{a}; y_0\right)$.

Графік базової функції $y = f(x)$ стискається до осі Oy в a разів, якщо $a > 1$ або розтягується від осі Oy в $\frac{1}{a}$ разів, якщо $0 < a < 1$.

4) Множення (-1)або зміна знаку.

$$y = f(-x)$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(-x_0; y_0)$.

Графік базової функції $y = f(x)$ симетрично відображається відносно осі Oy.

5) Знаходження модуля.

$$y = f(|x|)$$

Ті точки графіка $(x_1; y_1)$, для яких $x_1 < 0$ відкидаються. Ті точки $(x_2; y_2)$, для яких $x_2 \geq 0$ залишаються на графіку та додатково до кожної з таких точок з'являється точка з координатами $(-x_2; y_2)$.

З графіку базової функції $y = f(x)$ прибираються всі точки, що мають від'ємні абсциси. Всі точки на графіку $y = f(x)$, що мають невід'ємні абсциси залишаються на графіку $y = f(|x|)$ і вони додатково симетрично відображуються відносно осі Oy.

Перетворення по змінній y

1) Додавання заданого додатного числа.

$$y = f(x) + a, a > 0$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(x_0; y_0 + a)$. Графік базової функції $y = f(x)$ зсувається на a одиниць вверх.

2) Віднімання заданого додатного числа.

$$y = f(x) - a, a > 0$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(x_0; y_0 - a)$. Графік базової функції $y = f(x)$ зсувається на a одиниць вниз.

3) Множення на задане додатне число.

$$y = af(x), a > 0$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(x_0; ay_0)$. Графік базової функції $y = f(x)$ розтягується від осі Ox в a разів, якщо $a > 1$ або стискається до осі Ox в $\frac{1}{a}$ разів, якщо $0 < a < 1$.

4) Множення (-1)або зміна знаку.

$$y = -f(x)$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(x_0; -y_0)$. Графік базової функції $y = f(x)$ симетрично відображається відносно осі Ox.

5) Знаходження модуля.

$$y = |f(x)|$$

Кожна ключова точка $(x_0; y_0)$ переходить в точку $(x_0; |y_0|)$. Всі точки графіка функції $y = f(x)$, що мали невід'ємні ординати, залишаються без змін.

Всі точки графіка функції $y = f(x)$, що мали від'ємні ординати, симетрично відображуються відносно осі Ox.

Нарешті наведемо порядок дій при побудові графіка функції за допомогою геометричних перетворень

Алгоритм побудови графіка функції за допомогою геометричних перетворень

1) Серед усіх операцій, що складають задану функцію, обираємо базову операцію та будуємо графік відповідної функції за стандартними ключовими точками.

2) Визначаємо, які з решти операцій є перетвореннями по змінній x (виконуються раніше базової операції) та виконуємо відповідні їм перетворення у зворотному порядку відносно встановленого в заданій функції.

3) Визначаємо, які операції є перетвореннями по змінній y (виконуються після базової операції) та виконуємо відповідні їм перетворення у тому самому порядку, що встановлено в заданій функції.

Зауваження 1: якщо у функції, графік якої треба побудувати, присутні дві або більше операції знаходження модуля і відсутня інша базова операція, то в якості базової операції зручно обирати ту операцію знаходження модуля, що виконується раніше, щоб зменшити кількість перетворень по змінній x.

Зауваження 2: якщо у функції, графік якої треба побудувати, присутні одразу дві базові операції (за винятком знаходження модуля, що в такому випадку обов'язково сприймається як перетворення), то побудувати такий графік за допомогою геометричних перетворень неможливо.

Зауваження 3: якщо у функції, графік якої треба побудувати, декілька разів присутня незалежна змінна, то, в разі можливості, перед початком побудови вираз треба перетворити так, щоб незалежна змінна входила в нього один раз (найчастіше відповідні перетворення пов'язані з виділенням цілої частини дробу або виділенням повного квадрата в квадратному тричлені). Якщо відповідне перетворення зробити не можна, то побудувати такий графік за допомогою геометричних перетворень неможливо.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Перші зустрічі з параметром. Навчальний посібник для слухачів підготовчих курсів ІМЯО НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» / Г.В. Апостолова, В.В. Ясінський – К.: Вид.Гнозіс, 2016. – 336 с.
2. Біліченко Р.О., Лескевич Т.Ю. Посібник з дисципліни «Задачі з параметрами» / Р.О. Біліченко, Т.Ю. Лескевич – Дніпро: «Ліра ЛТД», 2020. - 52 с.
3. Крамор С.В. Задачі з параметрами і методи їх розв’язання. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 416 с.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 384 с.
5. Мерзляк А.Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. за кладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с.
6. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчальнометодичний посібник. - Житомир: Видавництво "Рута", 2016. – 468с.